Économie

# Une introduction à l'économétrie des séries temporelles

*Sébastien LECHEVALIER, chargé de TD à l'université Paris-I*

***L'économétrie a envahi l'analyse économique, si bien qu'il est devenu courant de rencontrer au fil d'un article les termes suivants : ARMA, VAR, non stationnaire, tendance stochastique… L'objectif de cette présentation est de rendre intelligibles ces concepts et les techniques fondamentales qui leur sont associées. On pourra alors espérer avoir accès aux enjeux théoriques d'un outil très utile mais non neutre, qui se cachent derrière un discours parfois obscur et très souvent technique.***

Comment expliquer le développement de l'économétrie des séries temporelles ? Pourquoi ne s'être pas contenté des méthodes économétriques usuelles, les « Moindres Carrés Ordinaires », et leurs divers prolongements (MCG, MCQG…) ? On peut répondre à cette double question selon deux points de vue.

Tout d'abord, le développement de la macrodynamique théorique a débouché sur un certain nombre de problèmes empiriques spécifiques qui nécessitaient la mise au point d'outils appropriés.

Ensuite, dans un certain nombre de cas, la méthode d'estimation des MCO ne s'applique pas, tout simplement. Après avoir précisé ces deux arguments, l'attention se portera successivement sur les profils théoriques de séries temporelles, sur le travail concret d'estimation et enfin sur les problèmes d'analyse de la tendance et de son extraction de la série brute.

## QU'EST-CE QU'UNE SÉRIE TEMPORELLE ?

Le terme « séries temporelles » désigne à la fois les séries réelles chronologiques et une suite théorique de variables aléatoires indicées par le temps et qui va servir à modéliser ces premières.

### Quelques problèmes spécifiques posés par les séries temporelles

Il existe toute une gamme de problèmes spécifiques aux séries chronologiques qui ne sont pas étrangers aux praticiens de statistiques descriptives et qui vont nécessiter la mise au point d'un certain nombre de techniques pour un traitement économétrique (c'est-à-dire à fondements probabilistes). C'est là la première raison du développement de l'économétrie des séries temporelles.

Ces problèmes sont les suivants : la prévision, l'identification et le retrait de la tendance, la correction des variations saisonnières, la détection de rupture, la séparation du court terme et du long terme, l'étude des anticipations des agents…

### Les différentes approches et les différentes modélisations

On n'évoque les techniques descriptives simples (désaisonnalisation par moyenne mobile, prévision par lissage) que pour faire le lien avec ce que connaît le lecteur et montrer l'avantage d'une modélisation.

La modélisation elle-même n'est pas unifiée même si elle repose la plupart du temps sur la méthodologie de Box et Jenkins et le recours aux processus (S) ARIMA, qui seront l'objet de cette présentation. Cette méthodologie s'applique d'ailleurs à différentes approches dont l'usage n'est pas exclusif. Une première approche est constituée par l'**analyse spectrale** directement importée de la physique : on décompose un processus $X_t$ en composantes périodiques en adoptant le critère des fréquences (les petites fréquences correspondent au long terme de type composante tendancielle tandis que les grandes fréquences correspondent au court terme de type composante saisonnière). Une seconde approche est l'*analyse temporelle* proprement dite qui consiste en l'étude directe des corrélations entre $X_t$ et les valeurs passées de $X$.

Un premier type de modélisation est particulièrement pratique pour la description des différentes composantes d'un processus : $X_t = m_t + s_t + u_t$ où :

– $m_t$ est la composante tendancielle (évolution à long terme) ;

– $s_t$ est la composante saisonnière (purement périodique, évolution à court ou moyen terme) ;

– $u_t$ est la composante conjoncturelle (résultat de perturbations, c'est la partie purement aléatoire du processus).

On peut envisager d'autres combinaisons de ces composantes que la forme additive (multiplicative, mixte…).

On considère de plus que les deux premières composantes expliquent l'espérance mathématique de $X_t$ tandis que $u_t$ explique sa variabilité (sa variance et sa covariance). Cette modélisation nécessite d'avoir identifier au préalable les différentes composantes : il existe pour cela différentes méthodes, descriptives ou plus théoriques, dont on abordera certains aspects dans la dernière partie consacrée à la non stationnarité et à la décomposition tendance-cycle.

Un second type de modélisation fait appel aux processus ARIMA qui seront présentés ici plus en détail. Ils font partie d'une classe plus générale de modèles dits « autoprojectifs » qui sont de la forme : $X_t = f\,(X_{t\text{-}1}, f\,(X_{t\text{-}2},\ldots\ g\,(u_t\,))$.

Soulignons enfin qu'on se limitera ici au cas univarié mais on doit dire quelques mots sur les représentations vectorielles autorégressives (modèles VAR). Ces dernières sont particulièrement utiles pour les économistes car elles permettent d'étudier l'impact d'un choc sur un environnement ainsi que les relations de causalité entre différentes variables, si bien que « l'économétrie des VAR » est un domaine de recherche particulièrement actif. Elles sont en fait une généralisation des représentations précédentes puisqu'il s'agit alors d'expliquer une variable $Y_t$ non seulement par ses valeurs passées ($Y_{t\text{-}1}$, $Y_{t\text{-}2}$, $Y_{t\text{-}3}$…) mais aussi par les valeurs présentes et passées d'autres variables ($X_t$, $X_{t\text{-}1}$… $Z_t$, $Z_{t\text{-}1}$…). L'écriture vectorielle s'avère alors tout à fait adaptée et les représentations multivariées sont aux représentations univariées ce qu'est la régression simple à la régression multiple dans le cadre des MCO. Mais un petit rappel s'avère peut-être ici nécessaire car en soi rien ne s'oppose au recours de ce cadre pour étudier des séries chronologiques.

## QUELQUES RÉSULTATS SUR LES PROCESSUS UNIVARIÉS

### Un rappel sur les MCO

On dispose de plusieurs séries d'observations (chronologiques, spatiales,…) sur plusieurs phénomènes et on cherche à expliquer l'un d'entre eux à partir des autres ou bien à prévoir la valeur de l'un d'entre eux à partir des autres. Plus généralement, on cherche s'il existe une relation linéaire entre une variable et une ou plusieurs variables.

La démarche économétrique va consister à formaliser le problème sous une forme probabiliste, en associant à chacune des séries d'observations une variable aléatoire et en distinguant entre la variable expliquée et les variables explicatives (dont on suppose en fait qu'elles sont certaines c'est-à-dire mesurées sans erreurs).

On doit dès maintenant préciser les notations probabilistes usuelles :

– E : espérance ;

– V : variance ;

– COV : covariance.

Pour simplifier on considérera ici le cas d'une régression simple c'est-à-dire avec une seule variable explicative. On cherche alors à écrire à partir des données une relation du type : $y_i = ax_i + b$ où est n indice qui représente des classes d'individus, le temps, etc.

Il ne faut pas oublier que la validité de cette méthode est soumise à la vérification d'un certain nombre d'hypothèses que l'on rappelle ici :

– H1. La première hypothèse est celle d'un modèle linéaire : $y$ est considérée comme une variable aléatoire ; $x$ comme une variable certaine (c'est-à-dire mesurée sans erreurs) ; la relation entre $x$ et $y$ est en moyenne une fonction linéaire. On peut formaliser ainsi :

$$y_i = ax_i + b + u_i$$
$$E\,(y_i) = \hat{a}x_i + b$$

où $u_i$ désigne le résidu non expliqué par la régression qui est supposé nul en moyenne ;

– H2. Dans le cas d'un modèle à plusieurs variables explicatives, ces dernières doivent être linéairement indépendantes ce qui assure l'unicité des coefficients estimés ;

– H3. Les résidus sont non corrélés (absence d'autocorrélation des résidus) entre eux et leur variance est constante (homoscédasticité).

$$V\,(u_i) = \sigma^2 \qquad COV\,(u_i, u_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

Sous ces hypothèses, la régression par les MCO donne les résultats suivants :

$$\hat{a} = \frac{COV\,(x, y)}{V\,(x)}$$

$$b = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}{n}$$

*A priori*, on peut appliquer cette méthode aux séries temporelles, c'est-à-dire quand l'indice $i$ désigne le temps. Mais il existe des cas où ce n'est pas possible. Concrètement, dans l'exemple 1 on peut appliquer les MCO ; mais pas dans l'exemple 2.

*Exemple 1 :* $X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $|\varphi| < 1$

*Exemple 2 :* $X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

avec $|\varphi| < 1$ et avec $|\theta| < 1$

# Quelques définitions et outils pour l'analyse des séries temporelles

## Stationnarité du second ordre et innovation d'un processus

Il existe une définition de la stationnarité au sens strict mais on se limite le plus souvent au critère d'une **stationnarité du second ordre**.

Un processus $X_t$ est stationnaire du second ordre si et seulement si :

$$\forall t, E(X_t) = m, V(X_t) = \sigma^2$$
$$\forall (t,h), COV(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$$

où $m$ et $\sigma^2$ sont indépendants du temps et où les covariances (appelées autocovariances et notées $\gamma(h)$ dépendent uniquement du délai $h$ entre les deux dates considérées.

De façon moins technique, une série est non stationnaire si sa variabilité évolue au cours du temps ou si les valeurs à chaque date sont corrélées entre elles et dessinent ainsi une certaine tendance.

*Exemple 1* : le processus $\varepsilon_t$ est un bruit blanc (noté BB(o,$\sigma^2$)) si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall t, E(\varepsilon_t) = 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \\ \forall h \neq o, COV(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 \end{cases}$$

Un bruit blanc est donc stationnaire par définition.

*Exemple 2* : soit le processus $X_{t\text{-}}$ défini par :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

où $\varepsilon_1$ est un bruit blanc.

$X_t$ est une marche aléatoire. On peut montrer qu'il est non stationnaire (sa variance varie dans le temps). On remarquera la présence du coefficient devant le terme $X_{t\text{-}1}$.

*Exemple 3* : les processus ARMA sont stationnaires tandis que les processus ARIMA ne le sont pas.

## L'opérateur retard

On le note L (Lag) ou B (Backward).

On entre ici dans la partie la plus technique qui est pourtant nécessaire. En effet, le recours à l'opérateur retard n'est pas seulement un problème d'écriture puisqu'il conduit à faire de l'algèbre (manipulation de polynômes et en particulier détermination de ces racines) une part importante du travail des économètres ! Il est en particulier très utile pour écrire de façon compacte les processus ARMA étudiés plus bas.

On a :

$$LX_t = X_{t-1} \;\;,\;\; L^2 X_t = X_{t-2} \;\;,\;\; L^k X_t = X_{t-k} \;\; \ldots.$$

On peut ainsi écrire un polynôme à l'aide de l'opérateur retard :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k X_{t-k} = \left( \sum_{k=0}^{p} a_k L^k \right) X_t$$

Une fois qu'on a écrit les séries temporelles sous forme de polynômes, on peut utiliser toutes les règles de l'algèbre linéaire. En particulier, dans l'étude des ARMA on est conduit à inverser

$$(1-\lambda L) = (1 - \frac{1}{z} L) = -\frac{1}{z}(L - z) \;\;,$$

ce qui est possible si $|z| \neq 1$, c'est-à-dire si le module de la racine est différent de 1.

On rencontre ici pour la deuxième fois la notion de racine unitaire à la base de la définition de la non stationnarité.

**L'innovation** d'un processus est la partie non prévisible de ce processus étant données les observations dont on dispose. On peut montrer que l'innovation d'un processus stationnaire est un bruit blanc. Si l'on veut, l'innovation est le résidu de la régression à la date t.

## « UNE GALERIE DE PORTRAITS » : LES PROCESSUS ARMA(P, Q)

Les économètres ont mis au point toute une galerie de profils théoriques de processus temporels qui permettent de modéliser une gamme étendue de séries chronologiques (c'est-à-dire les données dont on dispose).

Les processus MA(q), AR(p), ARMA(p, q) sont respectivement de la forme :

$$\forall t, X_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \varepsilon_{t-k}$$

$$\forall t, X_t + \sum \varphi_k X_{t-k} = \Phi(L) X_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\forall t, X_t + \sum \varphi_k X_{t-k} = \mu + \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \varepsilon_{t-k} \Leftrightarrow \Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t$$

où $\mu \in \Re$ , moyenne du processus que l'on suppose souvent nulle, $(\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \Re^q, (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \Re^p$

et où $\varepsilon_t BB(0, \sigma^2)$ .

MA désigne un processus « moyenne mobile » (*Moving Average*) et AR un processus auto-régressif (*Autoregressive*). On voit que les ordres p et q désignent le retard le plus élevé.

Ces processus sont stationnaires. C'est vrai par définition pour les MA(q) (car ils sont le cas particulier de processus MA(∞) dont on peut prouver la stationnarité). Il faut le supposer pour les AR(p) pour les distinguer des marches aléatoires présentées dans l'exemple 2 ci-dessus.

On s'intéresse particulièrement à ce que l'on appelle **la représentation canonique** de ces processus c'est-à-dire le cas où toutes les racines des polynômes retard ont un module supérieur à 1 car on peut montrer que dans ce cas $\varepsilon_t$ est l'innovation du processus. On peut également montrer qu'on peut toujours se ramener à cette représentation canonique.

D'autre part, il est important de souligner qu'on peut opérer des transformations pour passer d'une représen-

tation à une autre, de façon absolue ou par approximation. En particulier, par inversion des polynômes retard on peut toujours transformer un ARMA(p, q) en un MA(∞) ou en un AR(∞).
Une classe plus générale de processus est constituée par les SARIMA(s, p, d, q) qui permettent de rendre compte des phénomènes de périodicité (ou de saisonnalité : S) et de non stationnarité (ou d'intégration : I). On peut le modéliser de la façon suivante à l'aide des polynômes retard :

$$\forall t, (1-L)^d (1-L^s) \Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t \cdot$$

$d$ désigne donc l'ordre d'intégration de la série (ou si l'on veut le nombre de racines unitaires) et $s$ l'ordre de la saisonnalité. Par exemple, si on a des données mensuelles et si on modélise la série avec $s = 12$, alors on a une périodicité annuelle. Quant à l'intégration des séries on a déjà donné un exemple avec la marche aléatoire qui est en fait un ARIMA (0, 1, 0).
Enfin, on trouvera en annexe des simulations de plusieurs ARMA et d'une marche aléatoire pour des valeurs données des coefficients $\varphi$ et $\theta$.

## UN EXEMPLE D'ESTIMATION-MODÉLISATION

Par cet exemple on veut essayer de montrer en quoi consiste le travail concret des économistes. On distingue plusieurs étapes dans le cadre de la méthodologie de Box et Jenkins :
– il s'agit tout d'abord d'étudier la courbe représentative pour repérer les saisonnalités et la tendance éventuelle ;
– dans la phase suivante (appelée phase d'identification), il faut identifier d'abord les ordres de différenciation et de saisonnalité puis $p$ et $q$. Pour cela on utilise les caractérisations de processus AR, MA,…, faisant appel à des outils (fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle…) non développés dans la partie précédente et on procède de façon très empirique à partir de représentations graphiques appelées **autocorrélogrammes**. En général, à la fin de cette phase, on a en main plusieurs modèles théoriques parmi lesquels il faudra choisir lors des phases suivantes ;
– puis vient la phase d'estimation proprement dite des différents modèles retenus pour des valeurs de $p, d, q, s$ données. Plus précisément il s'agit d'estimer les coefficient $\varphi$ et $\theta$, ainsi que la variance de l'innovation, $\sigma^2$, selon les notations précédemment utilisées. Pour cela, dans certains cas on peut appliquer les MCO et dans d'autres non. On a alors recours à des méthodes d'estimation plus complexes (maximum de vraisemblance à l'aide de l'algorithme des innovations par exemple) ;
– enfin, on soumet les différents ajustements à un certain nombre de tests (tests d'autocorrélation des résidus, tests de nullité des coefficients estimés…) et on applique un certain nombre de critères (qualité de la prévision à l'horizon 1, critères AIC et BIC portant sur la qualité de l'information…) pour choisir le modèle finalement retenu.
Précisons que pour réaliser ces différentes étapes, on utilise des logiciels d'économétrie – dont le plus utilisé est SAS – qui donnent la représentation de la série brute, qui calculent les divers autocorrélogrammes pour des niveaux de différenciation définis et estiment enfin les coefficients des séries théoriques retenues.

## LA NON-STATIONNARITÉ DES SÉRIES TEMPORELLES ET LA DÉCOMPOSITION TENDANCE-CYCLE

Le point de départ est le constat empirique suivant : la plupart des données empiriques sont non stationnaires. Le problème posé aux économètres est de modéliser cette non stationnarité. Se dégagent deux grandes optiques qui ne sont pas neutres du point de vue de l'analyse de la tendance et du cycle et du point de vue de la théorie macroéconomique.
En fait, on a déjà rencontré ces deux optiques à travers deux modélisations. La première l'a été à travers l'équation suivante :
$X_1 = m_1 + u_1$,
ce qui peut être écrit sous une autre forme si on considère que
$s_1 = 0$ et $m_1 = \alpha + \beta_t : X_1 = \alpha_1 + \beta_t + u_t$.
On a ici une tendance déterministe. Une fois qu'on a extrait la tendance on dit que la série est stationnaire en écart.
L'autre modélisation possible est le recours au processus ARIMA c'est-à-dire intégrés d'ordre 1. Une fois qu'on a retiré la tendance on dit que la série est **stationnaire en différence**.
Ces deux types de modélisation renvoient à des modes différents de décomposition tendance-cycle et à des conceptions différentes du cycle. La première s'appuie sur des méthodes traditionnelles de décomposition comme le lissage par moyenne mobile ou l'estimation directe d'un trend déterministe. Elle est loin d'être définitivement rejetée et elle a même connu un certain renouveau tant d'un point de vue pratique avec des méthodes sophistiquées de décomposition (comme le filtrage à la Hodrick-Prescott) que d'un point de vue plus théorique avec la mise en avant par Pierre Perron de la robustesse de la modélisation à l'aide de changements structurels pour la pente et le niveau de la tendance. On a ici une conception du cycle comme écart à la tendance.
La seconde repose sur la décomposition de Beveridge-Nelson (dont l'article de 1982 a été le point de départ des recherches et des débats récents) à partir des processus ARIMA. La conception des composantes tendancielle et cyclique se fonde alors sur le fait que la tendance rend compte de toutes les composantes permanentes de la série (trend déterministe et impact à long terme des chocs, ce qu'on appelle la **tendance stochastique**) et que le cycle résulte de l'impact transi-

## BIBLIOGRAPHIE

Il n'existe pas d'ouvrage d'introduction aux séries temporelles qui évite un discours trop technique et qui présente des exemples concrets de procédure d'estimation-modélisation.
La bible en la matière, remarquable tant par sa rigueur et son exhaustivité est un ouvrage écrit en anglais :

James D. HAMILTON, 1994, *Times Series Analysis*, Princeton University Press.

Mais cet ouvrage a un double défaut : son prix et sa difficile accessibilité.

Deux autres ouvrages en français dont l'aspect est assez rebutant car ils adoptent un discours très technique et très formel mais ils développent quelques exemples concrets :

Christian GOURIÉROUX et Alain MONFORT, 1990, *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Économica.

Georges BRESSON et Alain PIROTTE, 1995, *Économétrie des séries temporelles. Théorie et applications*, Puf.

Enfin une référence « historique » :

BOX et JENKINS, 1976, *Times series Analysis. Forecasting and control*, Holden Day.

D'autre part l'une des ambitions de cette présentation était de donner des outils permettant de déchiffrer certains encadrés d'articles d'*Économie et Statistiques* où est fait appel à l'économétrie des séries temporelles. Voici quelques exemples récents :

MAUREL Françoise, 1990, « Dynamique de l'emploi et tendance de la productivité dans les années 80 », *Économie et Statistiques*, nº 237-238. Recours intensif à l'économétrie des séries temporelles et encadré sur « Stationnarité et persistance des variables économiques ».

GAUTIER Bernard, 1995, « Le marché automobile : un cycle spécifique ? », *Économie et Statistiques*, nº 282. Encadrés sur l'analyse spectrale non abordée ici et sur les nouveaux modes d'analyse du cycle, sur le filtre d'Hodrick et Prescott.

BOUTHEVILLAIN Karine et MATHIS Alexandre, 1995, « Prévisions : mesures, erreurs et principaux résultats », *Économie et Statistiques*, nº 285-286. Sur la prévision, une des principales applications de l'économétrie des séries temporelles.

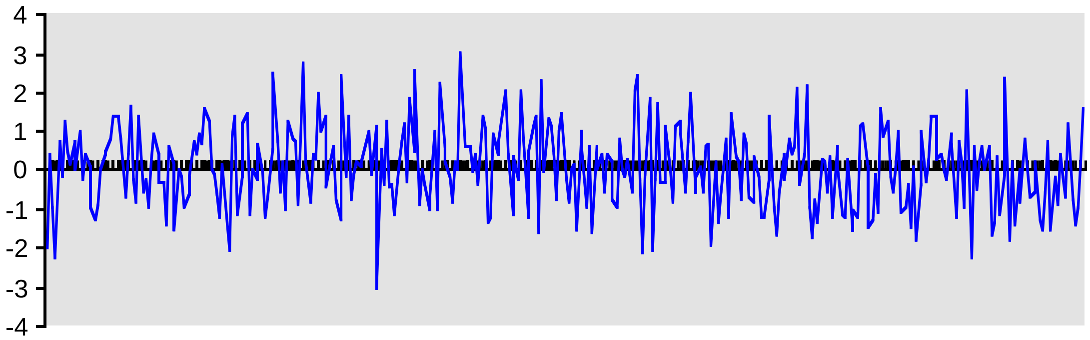
BOUTHEVILLAIN Karine, 1996, « Les cycles des grands pays industrialisés. Des croissances plus proches mais des zones déphasées », *Économie et Statistiques*, nº 298. Encadré sur les méthodes de décomposition tendance-cycle.

toire des chocs. On a aussi une autre conception de l'articulation entre le court terme et le long terme avec l'idée d'une persistance (propriétés d'hystérésis) des chocs de court terme sur le sentier de croissance de long terme. Ainsi ces idées développées initialement dans le cadre de théories relevant du « néo-clacissisme fondamentaliste » (théorie des cycles d'affaire réels) ont été récupérées par des néo-keynésiens qui y voyaient le moyen de réévaluer l'importance des mécanismes de court terme déconsidérés justement à la suite des critiques de Lucas et de ses disciples ! Soulignons enfin que l'on n'a pas là seulement une querelle de techniciens et que les enjeux théoriques sont considérables puisque la reconnaissance de la présence de racines unitaires dans les séries temporelles et la mise en avant du concept de tendance stochastique ont donné un fondement empirique sinon été une source d'inspiration pour les théories de la croissance endogène qui portent ainsi en elles une conception stochastique de la croissance.

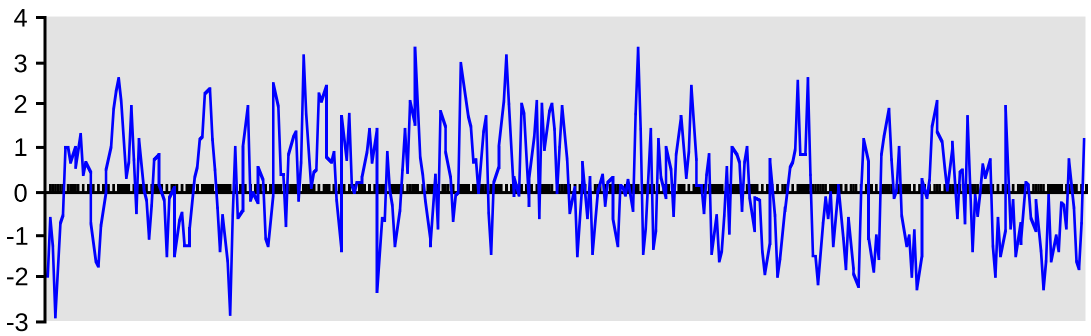
QUELQUES SIMULATIONS D'AR, DE MA ET D'UNE MARCHE ALEATOIRE

Les représentations suivantes ont pour objectif de les rendre moins abstraites. En termes de stationnarité, la référence est donnée par le bruit blanc (graphique 1). Les cinq graphiques suivants (graphiques 2 à 6) représentent des processus stationnaires, mais on observe que leur allure concrète varie beaucoup en fonction des valeurs des paramètres $\varphi$ et $\theta$. En particulier, plus ceux-ci sont proches de 1, plus apparaissent des caractéristiques de non stationnarité. Dans le cas limite (racine unitaire), on aboutit à un processus non-stationnaire (une marche aléatoire dans le cas du graphique 7).

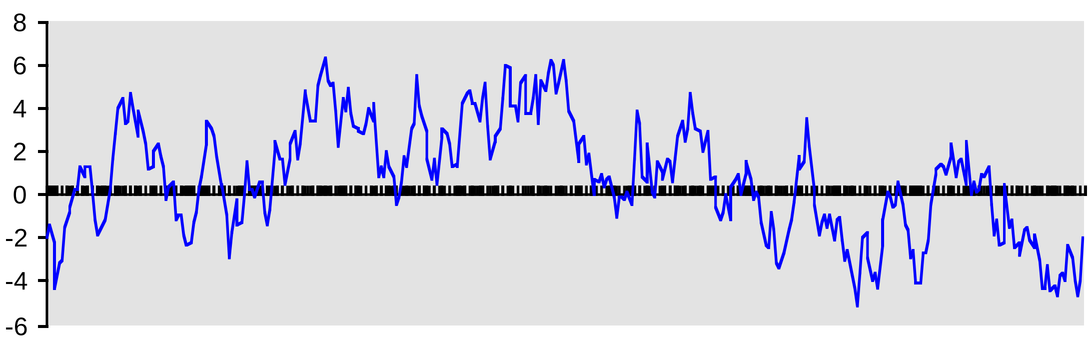
**Graphique 1.** Innovation ($\varepsilon_t \rightarrow BB(0, \sigma^2)$)



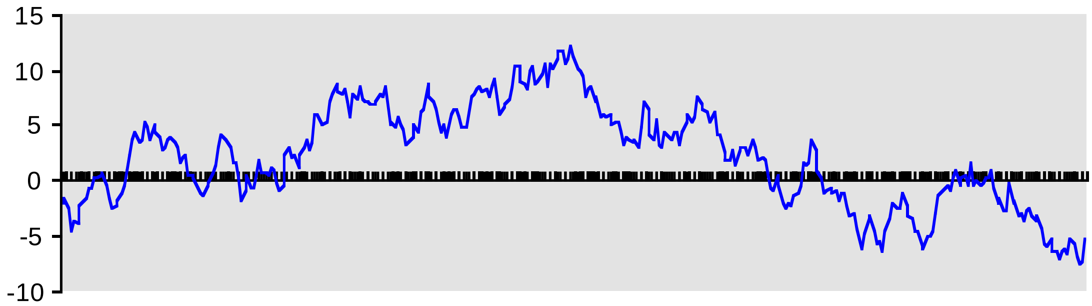

**Graphique 2.** AR(1) : $X_t = 0{,}5X_{t-1} + \varepsilon_t$



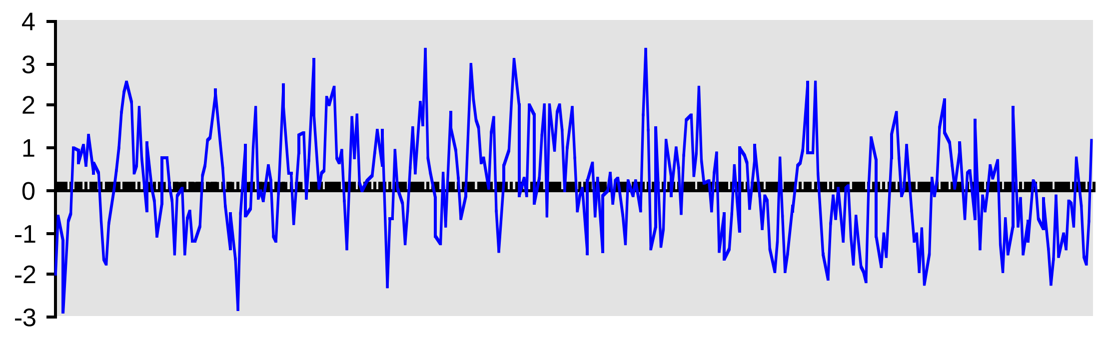

**Graphique 3.** AR(1) : $X_t = 0{,}9\, X_{t-1} + \varepsilon_t$



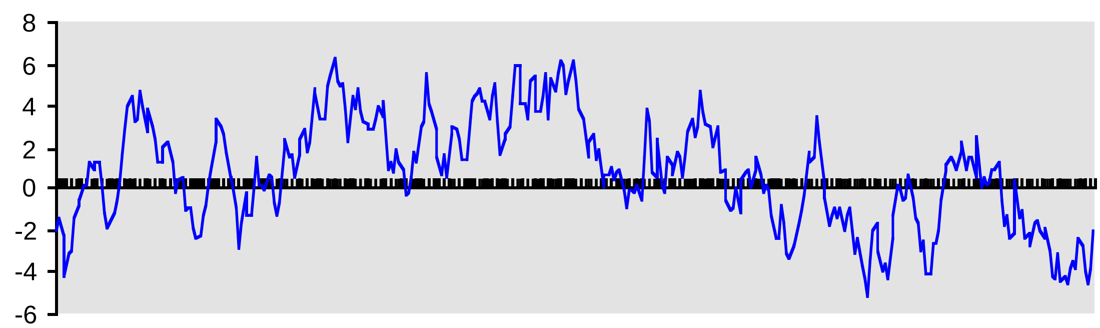
**Graphique 4.** AR(1) : $X_t = 0{,}96\, X_{t-1} + \varepsilon_t$



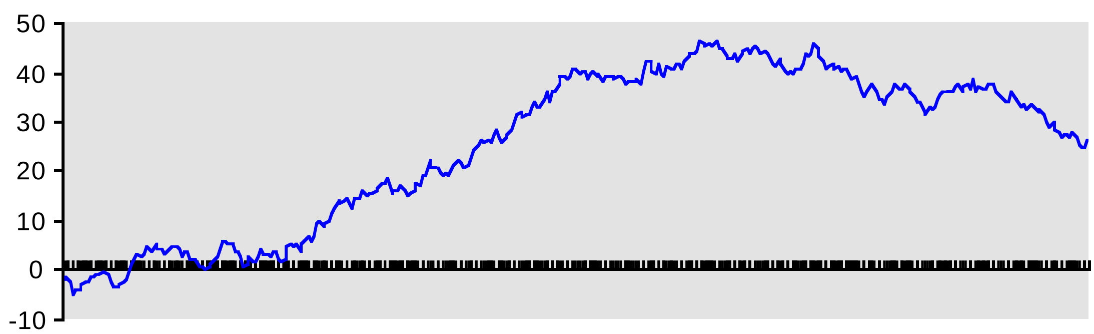

**Graphique 5.** MA(1) : $X_t = \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1}$




**Graphique 6.** MA(1) : $X_t = \varepsilon_t + 0{,}9\, \varepsilon_{t-1}$




**Graphique 7.** Marche aléatoire : $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$




L'auteur tient à remercier Fabrice Lenglart (Insee) pour l'aide apportée dans la réalisation de cette annexe.