Mathématiques et économie : je t'aime, moi non plus

Louis-Marie Bonneval,
professeur de mathématiques
à l'IREM de Poitiers (86).

Les programmes de mathématiques en filière ES[1] s'intitulaient en 1993-1994 : « mathématiques appliquées aux sciences économiques et sociales ». Ce libellé témoignait d'une triple volonté, novatrice et progressiste à l'époque : concevoir pour les élèves de cette filière un programme de mathématiques spécifique qui ne soit pas un simple extrait du programme de S ; éviter l'abstraction gratuite en répondant à des problèmes qu'étaient censés se poser les utilisateurs, en l'occurrence les économistes ; mieux armer les bacheliers ES en vue d'études de sciences économiques auxquelles les destinait **a priori** ***leur profil de formation.***

L'intitulé du programme est désormais redevenu sobrement « mathématiques ». C'est à mon sens une bonne chose, car réduire les mathématiques à un seul de leurs domaines d'application minimise leur portée, réduit leur aspect formateur et peut susciter des effets pervers[2]. Cependant les excellentes intentions ci-dessus subsistent : en témoigne par exemple l'apparition en spécialité des matrices ou des graphes, notions qui ne sont pas abordées en S, dont on préconise l'introduction à partir de problèmes, et qui ont des applications importantes en sciences économiques.

Mais ces louables intentions ne peuvent masquer la réalité du terrain. Cette réalité recèle un malentendu, voire un malaise, entre les deux disciplines. Cela tient à mon sens à deux raisons principales : un débat de fond sur le rôle des mathématiques dans la théorie économique, débat qui s'exprime surtout dans l'enseignement supérieur ; une méconnaissance mutuelle des objectifs de chaque discipline, méconnaissance qui apparaît principalement au lycée.

Cet article, paru dans la revue **Repères** ***n° 52 (juillet 2003), était initialement destiné aux enseignants de mathématiques de lycée. C'est pourquoi il développe quelques notions qui pourront sembler banales aux enseignants de SES.***

1. Je me limiterai dans cet article à la filière ES, mais il faudrait étudier le cas de la filière STT où se posent des problèmes spécifiques : élèves souvent en difficulté face aux mathématiques, horaire de mathématiques réduit, profil particulier des enseignants d'économie-gestion…

2. Voir dans *Repères,* juillet 1999, n° 36, Irem, l'excellent article de Martin Zerner « Les sujets de math du bac ES : le jour du bac, tu fais le con ».

[Dans le supérieur

Les sciences économiques enseignées après le baccalauréat font appel à des notions mathématiques élaborées, que les étudiants issus du lycée ont beaucoup de difficultés à maîtriser lorsqu'ils n'ont pas construit au lycée un ensemble d'images mentales adéquates. Par exemple, les problèmes d'optimisation de fonctions de plusieurs variables nécessitent à la fois une fréquentation minimale de la géométrie dans l'espace, une familiarisation avec les matrices et une bonne maîtrise du calcul différentiel.

Ce qui précède peut être relativisé en observant que peu de bacheliers ES suivent des études de sciences économiques. Mais l'argument est fallacieux, puisque précisément c'est leur niveau mathématique qui pose problème et les détourne de ce type d'études ! On peut donc penser qu'en améliorant leur formation en mathématiques et en élevant son niveau, on augmenterait le flux de bacheliers ES s'orientant dans cette voie.

Quoi qu'il en soit, la formation mathématique au lycée ne peut que gagner à une prise de conscience de ses applications ultérieures.

Cependant, il faut avoir conscience de ce qu'au niveau de la théorie économique elle-même (des théories, devrait-on dire), le rôle des mathématiques pose problème. En témoigne la polémique qui a agité les milieux universitaires au printemps 2001, et qui reste latente, entre partisans et adversaires de la mathématisation de l'économie. À l'initiative des étudiants de l'ENS, une pétition a circulé dans les facultés de sciences économiques de toute la France, réclamant une rénovation de l'enseignement, qui réduise le rôle des mathématiques au profit des sciences humaines. Cette pétition a suscité un texte de soutien d'un nombre important d'universitaires, texte qui a lui-même engendré un contre-appel d'autres universitaires. Pour comprendre ce débat, il est bon de situer les différentes disciplines qui interviennent dans les formations post-bac de sciences économiques et sociales (universités, classes préparatoires, écoles de commerce…) : à côté des enseignements à caractère « littéraire » (économie politique, histoire économique, géographie économique, histoire de la pensée économique, droit, sociologie…) et des enseignements de mathématiques dites « pures », il y a les enseignements où les mathématiques sont fortement présentes : statistiques, microéconomie, macroéconomie (cette dernière incluant l'économétrie).

LES STATISTIQUES

Elles donnent lieu en général à un enseignement séparé du cours de mathématiques, assuré par des économistes. Il s'agit essentiellement de statistiques inférentielles. Cette branche des statistiques, dont on peut faire remonter les racines à *L'Art de conjecturer* de Jakob Bernoulli (1713), s'est développée aux XVIIIe et XIXe siècles avec l'apparition de la loi normale (de Moivre, Laplace, Gauss) et au début du XXe siècle avec l'introduction de l'estimation et des tests (F. Galton, K. Pearson, W. Gosset, R. Fisher, E. Pearson, J. Neyman…). La maîtrise de ces théories implique des connaissances poussées en théorie de la mesure et de l'intégration. Aussi est-il courant d'apprendre à les utiliser en admettant les résultats théoriques. Que cette utilisation soit intelligente exige néanmoins une réflexion rigoureuse que la pratique mathématique devrait permettre d'acquérir. Au lycée, les nouveaux programmes de mathématiques proposent une sensibilisation à ces notions (fluctuation d'échantillonnage, simulation…), ce qui me paraît très utile, à condition que les professeurs de mathématiques en mesurent bien l'enjeu[3]. Il s'agit, en effet, non pas de développer de fastidieuses techniques de calcul, mais de se donner des instruments pour interpréter des observations et modéliser des situations[4].

LA MICROÉCONOMIE

C'est la théorie qui utilise le plus d'outils mathématiques élaborés. Issue du courant néoclassique[5], apparu à la fin du XIXe siècle (Walras, Jevons, Menger, Pareto, Cournot…), elle considère l'économie comme la rencontre, sur un marché, de producteurs et de consommateurs, chacun cherchant à maximiser ses intérêts économiques compte tenu de ses contraintes. Il en résulte une demande des consommateurs et une offre des producteurs, qui doivent s'équilibrer. La valeur d'un produit s'identifie alors au prix d'équilibre de ce produit. Dans cette théorie, le travail apparaît comme un service, autrement dit un bien immatériel. Le travailleur est donc un producteur qui vend son travail. Ce travail est acheté par d'autres producteurs, pour qui il est un facteur de production au même titre que les machines qui constituent le capital technique.

Cette base de départ a été considérablement enrichie depuis plus d'un siècle, intégrant des théories mathématiques de plus en plus sophistiquées : théorie des jeux, théorie du chaos, théorie des anticipations rationnelles, théorie des contrats…

À la microéconomie se rattachent par exemple les fonctions d'utilité, les fonctions de production, les fonctions d'offre et de demande, les fonctions de coût.

La polémique évoquée plus haut concerne essentiellement cette théorie : beaucoup lui reprochent d'utiliser des mathématiques absconses comme un écran de fumée pour justifier l'idéologie libérale. Celle-ci, dans sa version extrême, consiste à laisser faire les marchés sans intervention des pouvoirs publics, au motif qu'il aurait été mathématiquement démontré que « la main invisible du marché »[6] conduit à l'optimum.

Je serais tenté de dire que les mathématiques ne méritent ni cet excès d'honneur ni cette indignité. On sait bien que les conclusions d'une théorie découlent de ses prémisses : c'est donc sur ces dernières qu'il faut

3. À ce sujet, je me permets de renvoyer à mes deux articles du *Bulletin de l'APMEP* : « Intervalle : de confiance ? » (n° 427) et « Test d'équirépartition : qui a dit khi-deux ? » (n° 441).
4. Voir notamment ci-après l'analyse des tableaux de contingence.
5. Comme son nom l'indique, elle renouvelle l'approche « classique » du début du XIXe siècle (Smith, Ricardo, Malthus, Say, Stuart Mill…).
6. L'expression est d'Adam Smith *(Recherche sur la nature et les causes de la richesse des nations, 1776)*.

s'interroger, par exemple la rationalité des agents économiques[7], l'information complète, l'atomicité et la fluidité du marché, l'homogénéité des produits, la concurrence parfaite, les rendements décroissants, etc. Et sur la pertinence des modélisations : celles du travail et de la valeur évoquées ci-dessus ont été fortement critiquées, autant par les marxistes[8] que par les keynésiens.

LA MACROÉCONOMIE

Issue des travaux de Keynes dans les années trente, la macro-économie a d'emblée un point de vue global, à l'échelle d'un vaste ensemble tel qu'un pays. Elle définit des agrégats, comme la production totale, la consommation globale, l'investissement global, la masse monétaire, le crédit.

Elle préconise une intervention de l'État pour corriger l'incapacité des marchés réels à déterminer des équilibres « optimum » (par exemple l'équilibre du marché de l'emploi se réalise, mais avec des chômeurs).

Typiquement, sa problématique est la suivante : sur quelle(s) variable(s) faut-il agir (par exemple les taux d'intérêt), et de combien, pour faire évoluer telle autre variable (par exemple, l'emploi) ? C'est pourquoi elle sert de base aux politiques économiques dans les pays développés depuis une cinquantaine d'années. En France, elle s'appuie sur les études de l'Insee, notamment la Comptabilité nationale.

Ses modèles sont constitués d'équations linéaires reliant les différents agrégats, les principales hypothèses consistant à préciser ce qui peut être considéré comme constant sur le moyen terme. Les techniques associées à ces modèles constituent l'économétrie, qui utilise essentiellement l'algèbre linéaire et les statistiques inférentielles.

À la macroéconomie se rattachent, par exemple, les notions de propension à consommer ou à épargner, d'élasticité de la consommation par rapport au revenu ou au prix, de multiplicateur d'investissement ou de crédit, d'accélérateur.

On notera que les termes de microéconomie et macroéconomie sont calqués sur les termes utilisés en physique, où l'on parle d'approche microscopique et macroscopique. De fait, les théoriciens de l'économie, surtout les néoclassiques, ont longtemps rêvé d'une théorie « physique » de l'économie qui énonce des lois intangibles. Beaucoup s'accordent à penser aujourd'hui que ce rêve est quelque peu chimérique : les groupes humains ne se laissent guère enfermer dans des « lois » de type physique, ne serait-ce que parce que leur connaissance de telles lois les amène à modifier leur comportement de façon à les mettre en défaut. Mais aussi parce que ces comportements varient selon les époques, les lieux, les cultures, les catégories sociales…

Cela n'empêche nullement une approche scientifique, mais celle-ci a sans doute autant à prendre du côté des sciences humaines que du côté des sciences de la nature.

7. Selon laquelle tout consommateur serait solitaire, égoïste et calculateur…
8. À propos de Marx, on peut s'étonner, quel que soit le jugement qu'on porte sur sa pensée, de la place très réduite, voire inexistante, qu'elle tient dans les formations supérieures d'économie.
9. Contrairement aux caricatures véhiculées par certains hommes publics comme Claude Allègre, pourtant physicien !
10. Voir note 2.

Rappelons, à ce sujet, que les mathématiques proposent des outils de modélisation qui ne sont pas seulement des outils de calcul[9] (par exemple les structures utilisées par Claude Lévi-Strauss pour modéliser les relations de parenté ou les graphes décrivant les réseaux sociaux).

[Au lycée

Les professeurs de mathématiques désireux de proposer à leurs élèves des ouvertures sur les sciences humaines manquent souvent de la formation nécessaire. Certains sujets de « mathématiques appliquées à l'économie » dans les manuels ou au baccalauréat ES montrent que la bonne volonté ne suffit pas, et qu'on a vite fait de dire des bêtises dans un domaine qu'on ne maîtrise pas[10].

De leur côté, les professeurs qui enseignent les sciences économiques et sociales au lycée n'ont pas tous, loin s'en faut, une formation mathématique consistante : c'est le cas pour ceux qui sont passés par une faculté de sciences économiques ; en revanche, ceux qui ont une formation de sociologie, d'histoire ou de droit sont souvent mal à l'aise avec les mathématiques et ont tendance à s'en méfier.

Il en résulte que l'indispensable travail interdisciplinaire mathématiques-économie est difficile. Je connais néanmoins des lycées où il est pratiqué avec enthousiasme et efficacité, au grand bénéfice des élèves.

Je développe ci-dessous, avec mon langage de mathématicien, quelques thèmes qui me paraissent mériter un travail interdisciplinaire en ES et qui montrent la variété autant des outils mathématiques que des contenus économiques ou sociaux concernés.

Un premier domaine concerne le langage : les habitudes ne sont pas les mêmes dans les deux disciplines, et les élèves ont souvent du mal à opérer les transferts indispensables.

LANGAGE ET NOTATIONS

Il me semble par exemple qu'il y a une difficulté autour de la notion de **fonction** : alors qu'en mathématiques on éprouve le besoin de nommer le lien qui existe entre deux grandeurs, il est très rare qu'on le fasse en économie (pas plus d'ailleurs en physique ou plus généralement dans les sciences appliquées). Ainsi l'économiste dira « la consommation est fonction du revenu », mais n'éprouvera pas le besoin d'écrire $C = f(R)$. Ou alors il écrira $C = C(R)$: c'est plus économique *(sic)*, puisqu'on n'a pas besoin de la lettre f ; mais cela confond la fonction et son résultat, ce qui peut générer chez nos élèves de graves incompréhensions. Ainsi, beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que les fonctions sont omniprésentes dans les sciences appliquées, tout simplement parce qu'ils ne les voient pas écrites ! De là à penser que ce qu'ils font en mathématiques avec les fonctions ne sert à rien en économie (ni ailleurs…), il n'y a qu'un pas, que beaucoup n'hésitent pas à franchir…

Ce point de vue est conforté par la différence de notation pour le nombre dérivé : là où le mathématicien écrit f' (R), l'économiste écrit $\frac{dC}{dR}$. Ces deux notations ont chacune leur histoire et leur mérite, il n'est pas question d'imposer l'une contre l'autre[11]. Mais il est indispensable d'établir des ponts pour permettre aux élèves de franchir l'obstacle. En l'occurrence, il me semblerait très utile que le professeur de mathématiques introduise et commente la notation $\frac{dy}{dx}$ pour le nombre dérivé. En contrepartie, j'aimerais bien que les collègues non mathématiciens adoptent l'expression « nombre dérivé » ; en effet, dire – comme on l'entend souvent – « La pente de la tangente, c'est la dérivée » favorise toutes les confusions sur la nature des objets dont on parle : la pente serait-elle une fonction ? la dérivée serait-elle un nombre ? Ces à-peu-près de langage ne facilitent pas la compréhension du concept de fonction, ni de celui de nombre dérivé.

POURCENTAGES, INDICES, CROISSANCE

Nous savons tous la difficulté que présente pour les élèves (et pour la majorité des adultes) une pratique intelligente des pourcentages. Pourquoi un tel pathos autour d'une notion très simple, qui a été étudiée au collège ? Je risque un diagnostic : c'est que nous l'enseignons mal.

Les pourcentages ne sont rien d'autre qu'une façon d'écrire les nombres ($z\ \% = \frac{z}{100}$) et ne méritent pas au lycée d'être étudiés pour eux-mêmes. Certes, ils sont utilisés couramment pour écrire les fréquences et les taux d'évolution[12]. Mais ce sont les propriétés des fréquences et des taux d'évolution qui doivent être explicitées. Traiter ensemble ces deux notions très différentes, sous prétexte qu'elles s'écrivent toutes deux sous forme de pourcentage, conduit à des acrobaties de langage qui ne font qu'entretenir la confusion.

La **fréquence** (ou **proportion**) d'une sous-population A dans une population E est le rapport de l'effectif de A à l'effectif de E. Elle peut s'exprimer sous forme fractionnaire, ou décimale, ou de pourcentage : $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$. Elle a des propriétés simples, notamment :

① si p est la proportion de A dans E et p' la proportion de B dans E, et si A et B sont disjoints, alors p + p' est la proportion de A∪B dans E ;

② si p est la proportion de A dans E et p' la proportion de E dans F, alors pp' est la proportion de A dans F.

Ces deux propriétés n'ont rien à voir avec les pourcentages, elles restent vraies si p et p' sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire. C'est pourtant elles qui sont évoquées par le programme de mathématiques de première ES sous le libellé « Addition de pourcentages » ou « Pourcentages de pourcentages ».

Le **taux d'évolution** de y_1 à y_2 est le nombre $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$.

Les économistes l'appellent souvent taux de croissance (voir plus haut le programme de SES), ce qui peut déconcerter nos élèves dans le cas où sa valeur est négative[13]. On l'appelle aussi variation relative (par opposition à la variation absolue $y_2 - y_1$). On peut l'exprimer sous forme décimale, ou de fraction, ou de pourcentage.

Il a quelques propriétés importantes, notamment :

③ si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors $y_2 = y_1 (1 + t)$;

④ si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2 et t' le taux d'évolution de y_2 à y_3, alors le taux d'évolution de y_1 à y_3 est t + t'+ tt' ;

⑤ si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors le taux d'évolution de y_2 à y_1 est $\frac{-t}{1+t}$.

Ces propriétés n'ont rien à voir avec les pourcentages, elles restent vraies si t et t' sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire. C'est pourtant sous la rubrique « pourcentages » qu'apparaît dans le programme de mathématiques de première ES le libellé « Augmentations et baisses successives ».

On remarque que si t et t' sont petits devant 1, les propriétés ④ et ⑤ induisent les approximations classiques, respectivement t + t' et – t. Ces approximations méritent en première ES un commentaire soigné, car on peut les rapprocher du nombre dérivé en 1 des fonctions carré et inverse.

Il me semble indispensable qu'un travail commun entre le professeur de mathématiques et le professeur de SES dégonfle la baudruche « pourcentages » et sécurise nos malheureux élèves par l'adoption d'un langage commun simple et clair.

En particulier, il faut bannir ce fatras inutile de règles de trois ou de multiplications par 100 : quand on a écrit quelques égalités du style 0,02 = 2 %, on sait convertir les écritures ! Malheureusement, pour des raisons que j'ignore, certains professeurs répugnent à écrire de telles égalités…

Certains pièges du langage courant sont facilement déjoués avec le vocabulaire adéquat : si une fréquence passe de 1 % à 2 %, sa variation relative est + 100%, alors que sa variation absolue est + 1% (et le « point de pourcentage » devient inutile).

Quant à la notion d'**indice** (simple), elle ne pose pas de problème si on la définit clairement : l'indice de y_2 par rapport à y_1 est le nombre $\frac{y_2}{y_1} \times 100$. Souhaitons seulement que les journalistes économiques évitent les raccourcis sommaires du genre « 1995 = 100 », pour dire que l'année de référence est 1995.

La notion d'indice synthétique (comme l'indice des prix) est plus difficile puisqu'il s'agit d'une moyenne pondérée d'indices simples : une question délicate est de savoir avec quels coefficients on pondère. Signalons au sujet de l'indice des prix que le calcul du taux moyen annuel d'inflation à partir d'un taux pluriannuel permet une illustration de la notion d'exposant fractionnaire.

11. En revanche il faudrait abandonner en mathématiques la notation y' qui laisse croire qu'on dérive un nombre et non une fonction (ce qui est désastreux notamment lors des changements de variable). Mais, bien sûr, si on confond la fonction avec son résultat, on ne ressent pas l'incohérence de la notation y'.

12. Et bien d'autres choses, notamment les multiples ratios de l'analyse économique (taux d'épargne, taux d'autofinancement, taux d'imposition, taux de couverture des importations par les exportations…).

13. Je propose d'éviter l'expression « taux de variation », utilisée en économie, pour désigner $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$, et en mathématiques, pour désigner $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Cette tradition mathématique n'est d'ailleurs pas très heureuse, le mot « taux » étant dans tous ses autres usages réservé à un rapport de grandeurs de même nature.

FONCTIONS DE COÛT, COÛT MARGINAL

Les fonctions de coût sont un bel exemple de ce qu'est un modèle, en économie comme ailleurs : c'est une abstraction mathématique, fondée sur des hypothèses explicites de simplification de la réalité, et dont les conclusions valent ce que valent les hypothèses.

Du point de vue didactique, ce modèle présente un grand intérêt pour le professeur de mathématiques, car il illustre des notions clés de l'analyse en leur donnant du sens. Mais il faut savoir qu'il en présente beaucoup moins pour le professeur de sciences économiques et sociales qui lui attribue une faible valeur explicative de la réalité de l'entreprise, et qui en conséquence en parle peu.

On considère une entreprise, produisant au cours d'une période une quantité q d'un certain produit. On note C le coût total de cette production. On appelle fonction de coût la fonction f, positive et croissante, telle que $C = f(q)$. Le coût fixe est $f(0)$, le coût variable $f(q) - f(0)$. Le coût moyen unitaire est alors défini par $\frac{f(q)}{q}$ et le coût marginal par $f'(q)$.

La théorie néoclassique élémentaire fait deux hypothèses :

– hypothèse des rendements décroissants : à partir d'un certain seuil, le coût marginal augmente quand la quantité augmente. Autrement dit f' est croissante (f est convexe) sur un intervalle $[q_o, +\infty[$. Sous cette hypothèse, le coût moyen est minimal sur cet intervalle quand il est égal au coût marginal. En effet, si on pose $g(q) = \frac{f(q)}{q}$, la condition $g'(q) = 0$ équivaut à $f'(q) = \frac{f(q)}{q}$.

Pour q vérifiant cette condition, $g''(q) = \frac{f''(q)}{q} > 0$, ce qui montre qu'il s'agit d'un minimum ;

– hypothèse de concurrence parfaite : le prix de vente unitaire p est imposé à l'entreprise par le marché, et à ce prix elle vend toute sa production. Sous cette hypothèse (et la précédente), le profit est maximal quand le coût marginal est égal au prix de vente. En effet, le profit est $h(q) = pq - f(q)$. Donc $h'(q) = p - f'(q)$. Par suite $h'(q) = 0$ quand $f'(q) = p$. Et $h''(q) = -f''(q) < 0$, ce qui montre qu'il s'agit d'un maximum.

La notion de coût marginal permet une réflexion sur le sens du nombre dérivé. Les économistes l'interprètent en effet comme le coût de production d'une unité supplémentaire, ou le coût de la dernière unité produite : cela revient à identifier $f'(q)$ à $f(q+1) - f(q)$ ou à $f(q) - f(q-1)$. Cette approximation est justifiée si q est assez grand et f assez régulière : elle consiste alors à identifier localement la courbe de f avec sa tangente. Mais supposer f deux fois dérivable est une hypothèse forte, alors que certaines situations suggèrent plutôt pour f une fonction discontinue[14].

On pourrait envisager un modèle discret : q prenant des valeurs entières positives, on peut noter C_q le coût total, le coût marginal c_q étant alors défini par $c_q = C_{q+1} - C_q$ ou $c_q = C_q - C_{q-1}$. On peut alors utiliser les propriétés de la moyenne arithmétique.

● Si le coût moyen est minimal, alors il est égal au coût marginal. Raisonnons en effet par l'absurde : si, pour une production q, le coût marginal était inférieur au coût moyen, alors le coût d'une unité supplémentaire serait inférieur au coût moyen ; donc, en produisant davantage, on pourrait baisser le coût moyen (comme on baisserait la moyenne d'un paquet de copies, en ajoutant une copie de note inférieure à la moyenne initiale). Si inversement, pour une production q, le coût marginal était supérieur au coût moyen, alors le coût de la dernière unité produite serait supérieur au coût moyen ; donc, en produisant moins, on pourrait baisser le coût moyen (comme on baisserait la moyenne d'un paquet de copies, en retirant une copie de note supérieure à la moyenne initiale). Dans les deux cas, le coût moyen correspondant à q ne serait pas minimal.

● Si le profit est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente. Raisonnons en effet par l'absurde : si, pour une production q, le coût marginal était inférieur au prix unitaire, alors le coût d'une unité supplémentaire serait inférieur à p, donc une unité supplémentaire serait vendue avec bénéfice ; en produisant davantage, on pourrait donc augmenter le bénéfice. Si inversement, pour une production q, le coût marginal était supérieur au prix unitaire, alors le coût de la dernière unité produite serait supérieur à p, donc la dernière unité serait vendue à perte ; en produisant moins, on pourrait donc augmenter le bénéfice. Dans les deux cas, le bénéfice correspondant à q ne serait pas maximal[15].

Pour le professeur de mathématiques, ces raisonnements sont intéressants à faire en première ou en terminale ES, soit parce qu'ils donnent un enjeu aux calculs de dérivées, études de variation, recherches d'extremums, soit parce qu'ils font travailler sur la notion de moyenne[16].

En revanche, pour le professeur de sciences économiques et sociales, ces théorèmes n'ont qu'un intérêt théorique, dans le cadre de la compréhension du modèle, car les deux hypothèses indiquées sont rarement réalisées.

Cela dit, il ne faudrait pas caricaturer la théorie microéconomique en laissant croire que ce sont les seules hypothèses qu'elle envisage. C'est en modifiant ces hypothèses qu'elle s'est développée, jusqu'à la synthèse de Debreu-Arrow dans les années soixante-dix, synthèse elle-même dépassée par les développements récents.

TABLEAUX DE CONTINGENCE

Un tableau de contingence résume l'information relative à deux variables statistiques qualitatives sur une même population. Les nombres inscrits à l'intersection d'une ligne et d'une colonne sont des effectifs ou des fréquences.

Prenons un exemple très simple : les résultats d'une enquête. On a posé à un groupe de 40 jeunes la

14. Par exemple pour une entreprise de transport (car, train, avion), q désignant le nombre de voyageurs, une fonction en escalier paraît plus appropriée (tant qu'on n'a pas rempli un car, le coût d'un voyageur supplémentaire est nul).

15. Notons cependant que ces deux raisonnements classiques utilisant le modèle discret posent un problème logique : ils n'utilisent pas l'hypothèse des rendements décroissants. De fait, ils ne permettent pas de démontrer l'existence du minimum ou du maximum. Et pour cause : écrire $c_q = C_{q+1} - C_q = C_q - C_{q-1}$ revient à supposer arithmétique la suite (Cq). Alors la suite (c_q) est constante (et non décroissante), la suite (C_q/q) n'a pas de minimum, et la suite $(pq-C_q)$ n'a pas de maximum !

16. Encore faut-il les faire : ils perdent tout intérêt si les résultats sont admis !

question : « Regardez-vous les matchs de football à la télévision ? ». Les réponses sont les suivantes :

	Oui	Non
Garçons	20	4
Filles	10	6

On veut étudier comment le sexe influence la réponse. La proportion de oui dans la population totale est 75 %. Si la proportion de oui était 75 % dans la population des garçons et 75 % dans la population des filles (autrement dit si les fréquences conditionnelles étaient égales aux fréquences marginales), il serait naturel de dire que la réponse est indépendante du sexe. Le tableau des effectifs serait alors un tableau de proportionnalité, facile à reconstituer (en supposant inchangés les effectifs marginaux) :

	Oui	Non	**Total**
Garçons	18	6	24
Filles	12	4	16
Total	30	10	40

Le tableau des fréquences aurait alors une propriété remarquable : chaque fréquence conjointe serait le produit de ses deux fréquences marginales (celle du bout de ligne et celle du bout de colonne) :

	Oui	Non	**Total**
Garçons	0,50	0,10	0,60
Filles	0,25	0,15	0,40
Total	0,75	0,25	1

Pour le voir, prenons par exemple la première case : la proportionnalité s'écrit $\frac{18}{30} = \frac{24}{40}$ soit 18 x 40 = 24 x 30, d'où $\frac{18}{40} = \frac{24}{40} \times \frac{30}{40}$. Il en serait de même pour les trois autres cases.

Revenons alors au tableau réel des fréquences :

	Oui	Non	**Total**
Garçons	0,50	0,10	0,60
Filles	0,25	0,15	0,40
Total	0,75	0,25	1

Pour mesurer de combien il s'écarte du tableau théorique d'indépendance, on peut faire le rapport[17] du tableau réel au tableau théorique :

	Oui	Non
Garçons	1,11	0,66
Filles	0,83	1,50

Les coefficients supérieurs à 1 mettent alors en évidence les surreprésentations, les coefficients inférieurs à 1 les sous-représentations. On est ainsi renseigné sur le type de dépendance entre le sexe et la réponse.

On peut dégager de cet exemple très schématique une méthode générale pour étudier la dépendance entre deux variables statistiques :
– on divise tous les effectifs par l'effectif total, pour obtenir les fréquences conjointes ;
– on calcule les fréquences marginales par sommation des lignes et des colonnes ;
– on reconstitue, en multipliant les marges, le tableau de fréquences théoriques qui traduirait l'indépendance ;
– on rapporte ce tableau au tableau réel : cela met en évidence les sous-représentations et surreprésentations.

Cette méthode peut s'appliquer à des variables qualitatives ou quantitatives. Dans le cas quantitatif, on dispose d'autres outils, notamment le coefficient de corrélation linéaire. On démontre que si deux variables sont indépendantes au sens précédent, alors leur coefficient de corrélation linéaire est nul. Mais la réciproque n'est pas vraie. Autrement dit, l'indépendance est une propriété plus forte que la corrélation linéaire nulle. Ceci est dû notamment à ce que l'absence de corrélation linéaire n'empêche pas une corrélation d'un autre type.

Bien entendu, l'analyse peut être reprise avec le langage des probabilités, en considérant l'épreuve qui consiste à choisir au hasard un individu dans la population. Pour reprendre l'exemple précédent, en notant G, F, O, N les événements considérés, on peut s'intéresser aux probabilités conditionnelles : la probabilité de répondre oui si on est un garçon est supérieure à la probabilité de répondre oui ; la probabilité de répondre oui si on est une fille est inférieure à la probabilité de répondre oui. Cela confirme la dépendance entre le sexe et la réponse mise en évidence ci-dessus avec le langage statistique. L'indépendance quant à elle s'écrirait $P(O/G) = P(O)$ c'est-à-dire $P(O \cap G) = P(O)P(G)$: on aura reconnu la propriété du premier tableau de fréquences ci-dessus.

Il faut ici préciser que les conclusions ne concernent que le groupe de personnes étudié. Si l'on veut à partir de ce groupe inférer un jugement général sur l'attitude des garçons et des filles vis-à-vis des émissions de football, il faut considérer ce groupe comme un échantillon d'une population plus vaste. On doit alors se demander si cet échantillon est **représentatif** de la population, autrement dit si les 40 jeunes interrogés ont été choisis au hasard dans cette population[18] ; et, dans l'affirmative, si l'écart entre les fréquences observées fij et les fréquences théoriques p_{ij} est **significatif**, c'est-à-dire si la fluctuation d'échantillonnage ne suffit pas à l'expliquer. Il est intéressant pour cela de calculer $d^2 = \sum_{i,j} \frac{(f_{ij} - p_{ij})^2}{p_{ij}}$. On démontre en effet que sous l'hypothèse d'indépendance, pour un effectif n assez grand, il est rare (une fois sur 20) que nd^2 dépasse un certain seuil critique Q, qui dépend seulement des dimensions du tableau[19]. Si cela se produit, c'est donc que l'hypothèse d'indépendance est peu plausible : on dira alors que l'écart observé est significatif. Dans l'exemple ci-dessus, $nd^2 \approx 2{,}22$ et $Q \approx 3{,}84$,

17. J'évoque ici la pratique courante en sciences sociales, mais il est intéressant aussi d'effectuer la différence : cela permet une vérification algébrique (les sommes en ligne et en colonne doivent être nulles), et surtout cela prépare le calcul de d^2 abordé plus loin.

18. Faute de quoi, il pourrait y avoir un biais (par exemple si les jeunes interrogés étaient tous membres d'un club de football).

19. De façon plus précise, on démontre que la loi de nd^2 peut être approchée par la loi du χ^2 à $(\lambda - 1)(c - 1)$ degrés de liberté, où λ et c sont les nombres de lignes et de colonnes du tableau. Appelons Q le quantile d'ordre 0,95 de cette loi, valeur fournie par les tables ou les tableurs : pour environ 95 % des échantillons possibles de taille n, nd^2 est inférieur à Q. Autrement dit, nd^2 dépasse Q environ une fois sur 20. La valeur 0,95 est le niveau de confiance généralement choisi : si on en préfère un autre, par exemple 0,99, il faut adapter la valeur de Q. Notons que nd^2 peut aussi s'écrire $\sum \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$, où les $n_{ij} = n\, f_{ij}$ sont les effectifs observés et les $e_{ij} = n\, p_{ij}$ les effectifs théoriques.

l'écart n'est donc pas significatif. En revanche si les mêmes fréquences avaient été observées sur un échantillon de 80 individus, nd^2 vaudrait 4,44 et l'écart serait significatif, conduisant à rejeter l'hypothèse d'indépendance. On voit que l'effectif de l'échantillon joue un rôle essentiel dans les conclusions, ce qui n'est pas surprenant : plus le nombres d'observations est grand, plus l'information est précise.
Pour le professeur de sciences économiques et sociales, un exemple classique est l'analyse des **tables de mobilité sociale**, qui renseignent sur l'évolution de la répartition de la population en PCS (professions et catégories socioprofessionnelles) d'une génération à la suivante. On part de données statistiques telles que celles du tableau ci-dessous (enquête effectuée par l'Insee en 1985 auprès des hommes de 40 à 59 ans actifs ou anciens actifs). Les effectifs sont en milliers : on lit, par exemple, en première colonne qu'on a interrogé 426 000 hommes agriculteurs, et que parmi eux 381 300 avaient un père agriculteur, 16 200 un père artisan ou commerçant, etc.

Tables de mobilité sociale

PCS du père / PCS du fils	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	Total
Agriculteur	381,3	99,2	56,5	135,4	76,7	379,0	1 128,1
Artisan/commerçant	16,2	233,6	158,0	154,7	58,0	185,4	805,9
Cadre/intellectuel	1,5	27,3	178,0	61,7	17,8	11,4	297,7
Prof. intermédiaire	0,5	45,3	143,8	141,6	39,7	81,4	452,3
Employé	1,5	43,7	102,7	142,7	62,6	96,8	450,0
Ouvrier	25,0	175,0	137,0	392,0	182,0	872,0	1 783,0
Total	426,0	624,1	776,0	1 028,1	436,8	1 626,0	4 917,0

On calcule les fréquences conjointes en divisant tous ces effectifs par 4 917 :

PCS du père / PCS du fils	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	Total
Agriculteur	7,8 %	2,0 %	1,1 %	2,8 %	1,6 %	7,7 %	22,9 %
Artisan/commerçant	0,3 %	4,8 %	3,2 %	3,1 %	1,2 %	3,8 %	16,4 %
Cadre/intellectuel	0,0 %	0,6 %	3,6 %	1,3 %	0,4 %	0,2 %	6,1 %
Prof. intermédiaire	0,0 %	0,9 %	2,9 %	2,9 %	0,8 %	1,7 %	9,2 %
Employé	0,0 %	0,9 %	2,1 %	2,9 %	1,3 %	2,0 %	9,2 %
Ouvrier	0,5 %	3,6 %	2,8 %	8,0 %	3,7 %	17,7 %	36,3 %
Total	8,7 %	12,7 %	15,8 %	20,9 %	8,9 %	33,1 %	100,0 %

On reconstitue à partir des marges le tableau théorique d'indépendance :

PCS du père / PCS du fils	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	Total
Agriculteur	2,0 %	2,9 %	3,6 %	4,8 %	2,0 %	7,6 %	22,9 %
Artisan/commerçant	1,4 %	2,1 %	2,6 %	3,4 %	1,5 %	5,4 %	16,4 %
Cadre/intellectuel	0,5 %	0,8 %	1,0 %	1,3 %	0,5 %	2,0 %	6,1 %
Prof. intermédiaire	0,8 %	1,2 %	1,5 %	1,9 %	0,8 %	3,0 %	9,2 %
Employé	0,8 %	1,2 %	1,4 %	1,9 %	0,8 %	3,0 %	9,2 %
Ouvrier	3,1 %	4,6 %	5,7 %	7,6 %	3,2 %	12,0 %	36,3 %
Total	8,7 %	12,7 %	15,8 %	20,9 %	8,9 %	33,1 %	100,0 %

On rapporte le tableau réel des fréquences au tableau théorique d'indépendance :

PCS du père / PCS du fils	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	Total
Agriculteur	3,90	0,69	0,32	0,57	0,77	1,02	1,00
Artisan/commerçant	0,23	2,28	1,24	0,92	0,81	0,70	1,00
Cadre/intellectuel	0,06	0,72	3,79	0,99	0,67	0,12	1,00
Prof. intermédiaire	0,01	0,79	2,01	1,50	0,99	0,54	1,00
Employé	0,04	0,77	1,45	1,52	1,57	0,65	1,00
Ouvrier	0,16	0,77	0,49	1,05	1,15	1,48	1,00
Total	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Les sous et surreprésentations apparaissent sous forme de coefficients inférieurs ou supérieurs à 1. Le professeur de SES dira, par exemple, « Il y a 3,9 fois plus d'agriculteurs qui ont un père agriculteur qu'on n'en obtiendrait par tirage au sort des professions des enfants » et pourra rapprocher la notion d'indépendance de celle d'égalité des chances.

Ici la significativité est assurée, car l'effectif est énorme (près de 5 millions d'observations) : il ne s'agit pas d'un sondage mais d'une enquête quasiment exhaustive. La dépendance entre la PCS du père et celle du fils peut être mesurée par la **contingence** $C = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{d^2}}}$, comprise entre 0 (indépendance) et 1 (dépendance fonctionnelle) : ici $d^2 \approx 0{,}467$ donc $C \approx 0{,}56$. On peut aussi mesurer pour chaque case sa « contribution au d^2 » en calculant $\frac{1}{d^2}\frac{(f_{ij}-p_{ij})^2}{p_{ij}}$:

on constate ainsi que les agriculteurs fils d'agriculteurs contribuent pour 36 % à cette « inertie sociale », les cadres fils de cadres pour 16 %, etc.

Quant aux tables de recrutement et de destinée évoquées dans le programme de SES, on les obtient à partir du tableau initial en calculant les fréquences conditionnelles soit en colonne, soit en ligne.

Table de recrutement

PCS du père / PCS du fils	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	Total
Agriculteur	89,5 %	15,9 %	7,3 %	13,2 %	17,6 %	23,3 %	22,9 %
Artisan/commerçant	3,8 %	37,4 %	20,4 %	15,0 %	13,3 %	11,4 %	16,4 %
Cadre/intellectuel	0,4 %	4,4 %	22,9 %	6,0 %	4,1 %	0,7 %	6,1 %
Prof. intermédiaire	0,1 %	7,3 %	18,5 %	13,8 %	9,1 %	5,0 %	9,2 %
Employé	0,4 %	7,0 %	13,2 %	13,9 %	14,3 %	6,0 %	9,2 %
Ouvrier	5,9 %	28,0 %	17,7 %	38,1 %	41,7 %	53,6 %	36,3 %
Total	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %

Table de destinée

PCS du père / PCS du fils	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	Total
Agriculteur	33,8 %	8,8 %	5,0 %	12,0 %	6,8 %	33,6 %	100,0 %
Artisan/commerçant	2,0 %	29,0 %	19,6 %	19,2 %	7,2 %	23,0 %	100,0 %
Cadre/intellectuel	0,5 %	9,2 %	59,8 %	20,7 %	6,0 %	3,8 %	100,0 %
Prof. intermédiaire	0,1 %	10,0 %	31,8 %	31,3 %	8,8 %	18,0 %	100,0 %
Employé	0,3 %	9,7 %	22,8 %	31,7 %	13,9 %	21,5 %	100,0 %
Ouvrier	1,4 %	9,8 %	7,7 %	22,0 %	10,2 %	48,9 %	100,0 %
Total	8,7 %	12,7 %	15,8 %	20,9 %	8,9 %	33,1 %	100,0 %

On peut les interpréter en termes de probabilités : on lit, par exemple, dans la table de recrutement que la probabilité d'avoir un père agriculteur si on est agriculteur est 89,5 %, et dans la table de destinée que la probabilité d'être agriculteur si on a un père agriculteur est 33,8 %.

PROPENSION, ÉLASTICITÉ

Il s'agit ici d'un modèle macro-économique.
Pour une population donnée et un type de produit donné, la consommation globale dépend, entre autres, du revenu global[20] : $C = f(R)$.
Considérons alors un revenu donné R.

- Supposons que ce revenu subisse une variation absolue $R_1 - R = \Delta R$. Quelle variation absolue $\Delta c = C_1 - C$ peut-on en déduire ?

Si par exemple $\Delta c = 0{,}8\Delta R$, cela signifie que 80 % du revenu supplémentaire est affecté à la consommation : on dit que 0,8 est la propension marginale à consommer.

	Revenu	Consommation	
Variation	R	C	Variation
absolue	R_1	C_1	absolue

Autrement dit, on appelle propension marginale à consommer le nombre $\frac{\Delta C}{\Delta R} = \frac{C_1 - C}{R_1 - R} = \frac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - r}$.

Ce nombre permet de calculer la consommation attendue après une variation du revenu. Il est bien entendu compris en valeur absolue[21] entre 0 et 1.
Il dépend *a priori* de R et de R_1. Mais R étant fixé, si R_1 est suffisamment proche de R, on peut l'assimiler au nombre dérivé $f'(R)$.
Cela conduit à définir la propension marginale comme le nombre dérivé $f'(R)$.

- Supposons que ce revenu subisse une variation relative $\frac{\Delta R}{R}$. Quelle variation relative $\frac{\Delta C}{C}$ peut-on en déduire pour la consommation ?

Si par exemple $\frac{\Delta C}{C} = 2\,\frac{\Delta R}{R}$, cela signifie qu'une augmentation de 1,5 % du revenu entraîne une augmentation de 3 % de la consommation ; qu'une diminution de 1 % du revenu entraîne une diminution de 2 % de la consommation… : on dit que 2 est l'élasticité de la consommation par rapport au revenu.

	Revenu	Consommation	
Variation	R	C	Variation
relative	R'	C'	relative

Autrement dit, on appelle élasticité le nombre

$$\frac{\frac{C_1 - C}{C}}{\frac{R_1 - R}{R}} = \frac{C_1 - C}{R_1 - R} \times \frac{R}{C} = \frac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - R} \times \frac{R}{f(R)}.$$

Ce nombre dépend *a priori* de R et de R'. Mais, R étant fixé, si R_1 est suffisamment proche de R, on peut assimiler comme ci-dessus le nombre $\frac{f(R_1) - f(R)}{R_1 - R}$ au nombre dérivé $f'(R)$.
Cela conduit à définir l'élasticité de f en R par la formule : $e(R) = \frac{R f'(R)}{f(R)}$.
Cette notion d'élasticité a un grand intérêt théorique et pratique. Elle permet notamment de faire des prévisions macroéconomiques. Par exemple, pour la France actuelle, l'Insee l'évalue à 0,4 pour l'alimentation, à 0,7 pour le logement, 1,5 pour les transports et télécommunications. Cela implique qu'avec un taux de croissance du PIB de 2 %, on peut s'attendre à une augmentation de 0,8 % des dépenses d'alimentation, de 1,4 % des dépenses de logement, de 3 % pour les transports et télécommunications…
On a pris ci-dessus l'exemple de l'élasticité de la consommation par rapport au revenu. On peut bien entendu parler d'élasticité dans tous les cas où une grandeur dépend d'une autre. Et donc, en mathématiques, associer à toute fonction dérivable f une fonction « élasticité de f » définie par $Ef(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)}$.
On démontre facilement que les fonctions à élasticité constante sont les fonctions puissances : cela explique leur rôle privilégié dans certains modèles (fonctions de production de Cobb-Douglas par exemple).
L'élasticité de la consommation par rapport au prix[22] est une donnée très utile pour la politique économique : si elle est forte, une augmentation du prix réduit fortement la consommation ; si elle est faible (cas du tabac ou des carburants par exemple), une augmentation du prix se répercute peu sur les quantités vendues, si bien que l'État qui décide de cette augmentation récupère les taxes sans compromettre les entreprises du secteur.

MULTIPLICATEUR D'INVESTISSEMENT

On sait que, dans un pays, une politique de grands travaux (construction d'autoroutes, de logements…) peut avoir un effet « boule de neige » sur l'économie : cet investissement va en effet faire fonctionner des entreprises, qui vont donc distribuer du revenu ; ce revenu va être dépensé, ce qui va faire fonctionner d'autres entreprises, etc.
Historiquement, cette idée a été mise en œuvre pour la première fois en 1933 lors du « New Deal » de F. D. Roosevelt, qui a permis de résoudre la crise de 1929, donnant ainsi ses lettres de noblesse à la théorie de Keynes.
On peut la traduire dans le modèle macroéconomique de base, ce qui permet de la quantifier.
Notons R le revenu global, C la consommation globale, I l'investissement global.
On fait l'hypothèse que la propension marginale à consommer $c = \frac{\Delta C}{\Delta C}$ est constante sur le moyen terme : comme on l'a vu ci-dessus, cela signifie qu'une variation de revenu entraîne une variation de consommation $c\Delta R$.
On suppose aussi que l'économie est fermée, de sorte que tout le revenu distribué est dépensé à l'intérieur du pays.
Considérons alors une augmentation ΔI de l'investissement global. Elle entraîne immédiatement une aug-

20. Pour un pays, R s'identifie en gros au produit intérieur brut.
21. Il peut être négatif : par exemple, la consommation de pain courant ou de vin ordinaire a tendance à diminuer quand le revenu s'élève.
22. Cette élasticité est bien entendu négative, sauf pour certains biens de luxe pour lesquels le snobisme peut jouer (preuve s'il en est besoin que le consommateur n'est pas toujours rationnel au sens restrictif de la microéconomie élémentaire !).

EXEMPLES DE LIAISONS POSSIBLES ENTRE ÉCONOMIE ET MATHÉMATIQUES

- Les taux, croissance absolue et relative
- Les indices, l'indice des prix, l'inflation
- L'actualisation, évolution en volume et en valeur
- Les graduations logarithmiques
- Les multiplicateurs keynésiens
- Les propensions marginales à consommer, à épargner
- Les fonctions de coût, le coût marginal
- Les fonctions de production, la productivité
- L'offre et la demande
- Les tableaux à double entrée, dépendance et indépendance
- Les moyennes, l'effet de structure
- Les sondages
- Les fluctuations et leur mesure
- Corrélation et causalité
- L'ajustement (linéaire ou non)
- La concentration, l'indice de Gini
- Les emprunts, les amortissements
- L'élasticité consommation-revenu, consommation-prix
- La logique dans les raisonnements économiques
- La gestion prévisionnelle
- La prévention des risques
- Le contrôle de fabrication
- La politique sanitaire
- L'espérance de vie
- La croissance démographique
- La croissance économique
- L'oscillateur de Samuelson
- La matrice de Léontief et le tableau entrées-sorties
- Les variations saisonnières
- Dépréciation d'un équipement
- Les graphes d'ordonnancement
- Les réseaux sociaux

mentation de revenu ΔI pour les entreprises qui fournissent les biens concernés. Ce revenu est distribué entre les propriétaires et les employés de ces entreprises. Cela entraîne une augmentation de consommation $c\Delta I$, qui crée une augmentation de revenu $c\Delta I$ pour les entreprises. Celle-ci entraîne à son tour une augmentation de consommation $c^2\Delta I$, qui crée une augmentation de revenu $c^2\Delta I$. Etc.

Au bout de n périodes, l'augmentation de revenu est $(1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1})\Delta I$, c'est-à-dire $\frac{1-c^n}{1-c}\Delta I$.

Comme $0 < c < 1$, c^n est assez vite négligeable devant 1. On peut donc considérer qu'en fin de compte le revenu global a été augmenté d'une quantité $\frac{1}{1-c}\Delta I$.

Le nombre $\frac{1}{1-c}$ s'appelle le **multiplicateur d'investissement**.

Par exemple, si la propension marginale à consommer est 0,8, le multiplicateur d'investissement est égal à 5 : une augmentation d'investissement crée une augmentation de revenu cinq fois plus grande.

Il est intéressant de comparer ce raisonnement à un raisonnement équivalent qui ne fait pas appel aux suites géométriques. Il consiste à écrire $R = C + I$ (identité fondamentale de la macroéconomie) et $C = cR + C_o$ (où c et C_o sont constants sur le moyen terme). En éliminant C, on en déduit $R = \frac{C_o + I}{1+c}$, d'où $\Delta R = \frac{\Delta I}{1-c}$.

Ce raisonnement peut paraître plus simple, mais il n'a pas la même puissance explicative que le précédent.

Conclusion

Tout ce qui a été exposé ci-dessus fait ressortir l'intérêt didactique de la liaison mathématiques-économie :

– elle montre aux élèves que les mathématiques font partie de la culture au sens large du terme, puisqu'elles offrent un cadre de pensée aux autres sciences, qu'il s'agisse de sciences de la nature comme la physique ou de sciences humaines comme l'économie…

– elle met en pratique le jeu de contextualisation-décontextualisation par lequel les mathématiques opèrent et se construisent., ce qui éclaire leur fonctionnement ;

– elle permet une réflexion formatrice sur la démarche de modélisation : choix des paramètres significatifs, formalisation de leurs liaisons, outils mathématiques utilisés, approximations, facteurs négligés… En s'interrogeant sur le caractère prédictif des modèles et leur domaine de validité, elle soulève le problème de leur adéquation aux phénomènes dont ils rendent compte. De ce point de vue, il est finalement très instructif que certains de ces modèles soient objets de controverse entre les économistes[23] ;

– elle facilite l'acquisition des concepts de l'une comme de l'autre discipline : on sait que la compréhension d'un concept dépend en partie de la multiplicité des approches ;

– elle peut motiver les études abstraites pour des élèves peu portés à étudier les mathématiques pour elles-mêmes, en en montrant des domaines d'application ;

– elle renouvelle l'enseignement des mathématiques

23. Les élèves de S n'ont pas la même chance : au niveau du lycée, les modèles de la physique sont tellement consensuels qu'on peut être tenté de les prendre pour la vérité.

à un moment critique de désaffection des élèves pour les études scientifiques.

Ce type d'activité trouve sa place assez naturellement au lycée, dès l'instant que les enseignants en ont la volonté. Les TPE en particulier fournissent un cadre propice. Encore faut-il que le rôle des mathématiques ne s'y limite pas – comme c'est trop souvent le cas – aux statistiques descriptives. Ce qui précède montre qu'il y a matière pour une foule de sujets passionnants reliant mathématiques et économie, sans que les mathématiques soient réduites à jouer les utilités. J'en propose quelques-uns en encadré, page précédente, centrés soit sur une notion mathématique, soit sur une notion économique.

Les enseignants qui acceptent de s'y engager y trouvent leur compte : en décloisonnant le savoir, l'échange permet un enrichissement mutuel et un nouveau regard sur sa propre discipline.]

BIBLIOGRAPHIE

Fredon D., *Mathématiques, économie et gestion*, Paris, Cedic, 1976.

Gasquet S., Chuzeville R., *Les Mathématiques dans l'information chiffrée*, CRDP de Grenoble, 1993.

Gasquet S., *Les Chiffres et l'Élève*, CRDP de Grenoble, 1994.

Huriot J.-M., *Économie, mathématiques et méthodologie*, Paris, Economica, 1994.

Mathématiques dans les sections ES, Irem de Clermont-Ferrand, 1995.

L'Enseignement des mathématiques en première ES, Irem de Besançon, 1995.

Quinet E., de Calan P., *Les Mathématiques en économie : apport ou invasion ?,* Paris, Éditions universitaires, 1995.

Mathématiques en filière économique et sociale, Irem de Poitiers, 1996.

Mathématiques et sciences économiques et sociales au lycée, Irem de Strasbourg, 1996.

Honoré L., *L'économie est-elle une science ?,* Paris, Flammarion, 1997, coll. « Dominos ».

Modèles mathématiques pour les sciences économiques et sociales, Irem de Bourgogne,1998.

De la spécificité des mathématiques en série ES, Mafpen de Lille/ CRDP du Nord-Pas-de-Calais, 1998.

« Les mathématiques sociales », dossier hors série, *Pour la science*, juillet 1999, n° 24.

Hébert J.-P., « Mathématiques, économie et citoyens », *Bulletin APMEP*, septembre 1999, n° 424.

Schlacther D., *Comprendre la formulation mathématique en économie*, Paris, Hachette, 2000.

« L'économie malade des mathématiques », Dossier de la revue *Tangente*, décembre 2000, n° 78.

« Économie et mathématiques : quelques éléments du débat », Groupe mathématiques-économie de l'Irem de Strasbourg, *Repères*, juillet 1999, n° 36.

Zerner M., « Les sujets de math du baccalauréat ES : le jour du bac, tu fais le con », *Repères*, juillet 1999, n° 36.

Ekeland I., « Économie et mathématiques », *Les mathématiques, Université de tous les savoirs*, Paris, O. Jacob, 2000.

Ekeland I., « Le décryptage de l'économie », *Pour la science*, octobre 2002, n° 300.

Mathématiques première ES et terminale ES, rubrique « Math&Co », Paris, Bréal, 2002. Le livret pédagogique correspondant est disponible en version papier pour la première, en version électronique pour la terminale sur le site www.editions-breal.fr.