

Sous les pavages... la translation

Daniel BURET – Professeur de mathématiques

Une approche expérimentale de la notion de translation allie de façon originale les apports d'un voyage scolaire en Andalousie et les concepts mathématiques. Le traitement de texte utilisé comme outil de dessin côtoie le logiciel de construction géométrique. Une ouverture vers des activités pluridisciplinaires, dans le cadre des itinéraires de découverte par exemple.

Mes élèves de quatrième et de troisième ont fait avec leur professeur d'espagnol un voyage en Andalousie. Ils ont vu de magnifiques monuments : la mosquée de Cordoue, l'Alhambra à Grenade... Ils ont pu apprécier la beauté des Zelliges, ces mosaïques typiques de l'art arabo-andalou, qui recouvrent les parties inférieures des murs ou du sol des cours. Fruits du fin travail d'assemblage de pièces de formes géométriques simples, elles entraînent l'imaginaire vers des constellations mathématiques.

Comment ne pas évoquer, de retour en classe, les splendides fresques et les superbes pavages de l'Alhambra ? Mais par quelles activités ? J'ai tout d'abord pensé à proposer à mes élèves un devoir très « classique » sur le thème des pavages. En préparant mon sujet à l'aide de mon traitement de texte habituel⁽¹⁾, j'ai utilisé les outils de dessin de ce logiciel pour l'illustration des différents pavages nécessaires dans ce devoir. La facilité de réalisation m'a incité à proposer aux élèves une activité préliminaire. Le

programme de géométrie invitant à introduire la notion de translation à partir « d'approches expérimentales, par exemple sur des frises ou des pavages », il m'a paru intéressant de les mettre en position de recherche, modeste recherche certes, mais certainement assez stimulante pour les rendre actifs et réceptifs à un travail ultérieur plus approfondi. Le recours au traitement de texte était, en outre, l'occasion de vérifier et de consolider des apprentissages fondamentaux en informatique, conformes aux compétences définies dans le B2i.

Mais ils n'ont toutefois pas échappé au devoir ! Ils y ont étudié, de façon traditionnelle, les propriétés des polygones obtenus lors de la construction de leurs pavages. La notion de translation, quant à elle, a été abordée après la correction du devoir à l'aide d'un logiciel de construction géométrique.

(1) Ici le travail est réalisé à l'aide du traitement de texte *Word*, mais il serait possible de conduire cette séquence à l'aide de *StarOffice*, par exemple.

EXPLORER PAR LE DESSIN

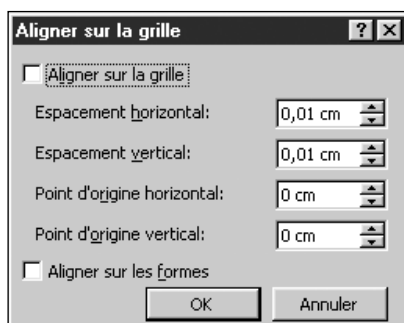
La première activité, activité d'exploration et de découverte, a lieu dans la salle informatique avec un ou deux élèves par poste, à partir d'un guide de travail qu'ils vont ouvrir directement dans leur traitement de texte (fichier TPWord.doc que vous pouvez télécharger sur le site de Médialog, voir encadré en page 8). Le document ne contient que les trois dessins suivants et les quatre consignes leur permettant de réaliser cette activité.



Le deuxième dessin n'est pas utilisé dans la suite mais sert à comprendre la nature du triangle. Les élèves pourraient faire eux-mêmes ces dessins, mais l'expérience montre que la réalisation du triangle n'est pas évidente alors que la réussite de la suite en dépend (sans compter un gain de temps non négligeable).

Pour celui qui voudrait créer lui-même ces dessins, la réalisation d'un carré avec les outils de dessins de Word ne pose pas de problème : il suffit de prendre la forme *Rectangle* et d'appuyer simultanément sur les touches Ctrl et Maj tout en traçant la figure. Mais il faut un carré de petite taille pour faire le pavage (les élèves ont tendance à faire un trop grand carré). La création du triangle est moins facile, car il faut utiliser l'outil *Lignes* de la barre d'outils *Dessin* et prendre comme cibles les poignées du dessin du carré pour cliquer très précisément sur les trois sommets du futur triangle. En cas d'erreur, on peut modifier la position des points par le menu *Dessin - Modifier les points*.

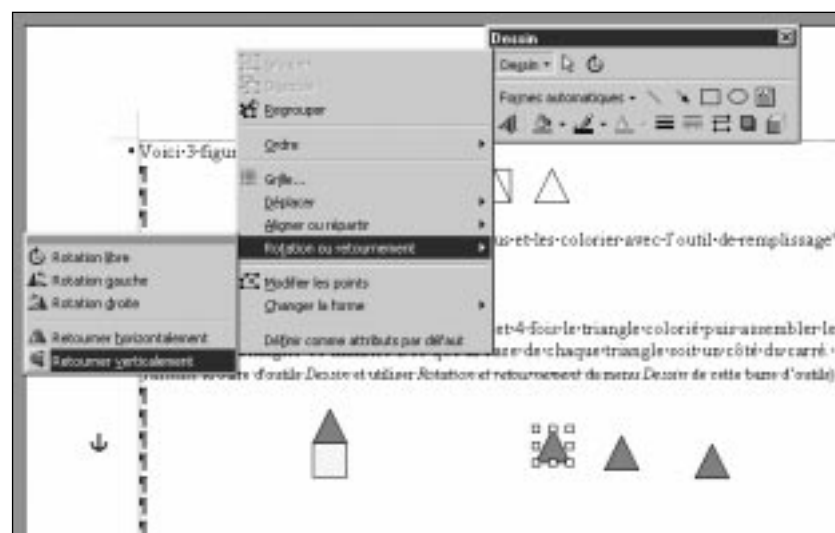
Pour permettre l'ajustement de chacun des éléments du motif de base, il est nécessaire que le positionnement sur la grille soit désactivé. La fenêtre de dialogue ci-dessous s'obtient par la commande *Dessin-Grille* disponible dans la barre d'outils *Dessin*.



Les élèves lancent le traitement de texte puis ouvrent le fichier qui constitue leur guide de travail (TPWord.doc). Ils vont exécuter les consignes qui apparaissent directement à l'écran.



Pour construire le motif de base, ils commencent par copier le carré et le triangle. Ils les collent successivement sous la première consigne. Ils les colorient avec des couleurs de leur choix (image ci-dessus). Après avoir copié, sous la consigne 2, une fois le carré et quatre fois le triangle, ils procèdent à la construction de la figure de base en utilisant l'outil *Rotation ou retournement*. Dans l'image ci-dessus, ils utilisent l'option *Retourner verticalement* avant d'ajuster le triangle au côté inférieur du carré.



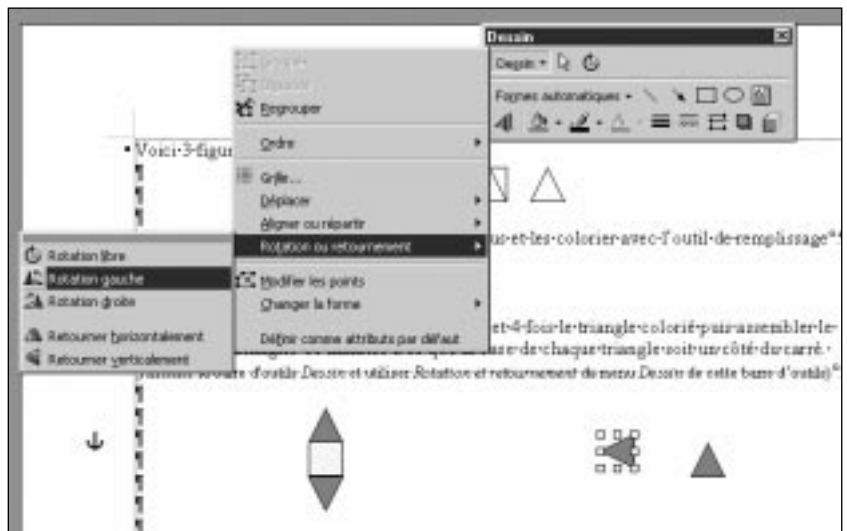
Dans une première étape, les élèves vont construire le motif de base du pavage. Ils commencent par copier une fois le carré et le triangle, puis ils les colorient (avec des couleurs différentes de leur choix). Ils copient ensuite quatre fois le triangle et assemblent le carré avec les quatre triangles (la base de chaque triangle étant confondue avec un côté du carré). Pour cette opération ils ont recours à l'outil *Rotation ou retournement* du menu *Dessin* de la barre d'outils *Dessin* de *Word* et aux options *Rotation gauche*, *Rotation droite* et *Retourner verticalement*. Ils réalisent le positionnement fin des triangles, en sélectionnant l'un des triangles et en le déplaçant avec les touches fléchées du clavier. Pour cela, il faut avoir au préalable désactivé l'option *Aligner sur la grille* dans la boîte de dialogue obtenue par la commande *Dessin – Grille*.

Les élèves obtiennent alors le motif de base : une étoile à quatre branches composée du carré et des quatre triangles. Ils doivent alors grouper ces cinq objets pour obtenir une seule forme : le motif de base des pavages. Ce groupement se fait par l'outil *Grouper* du menu *Dessin*.

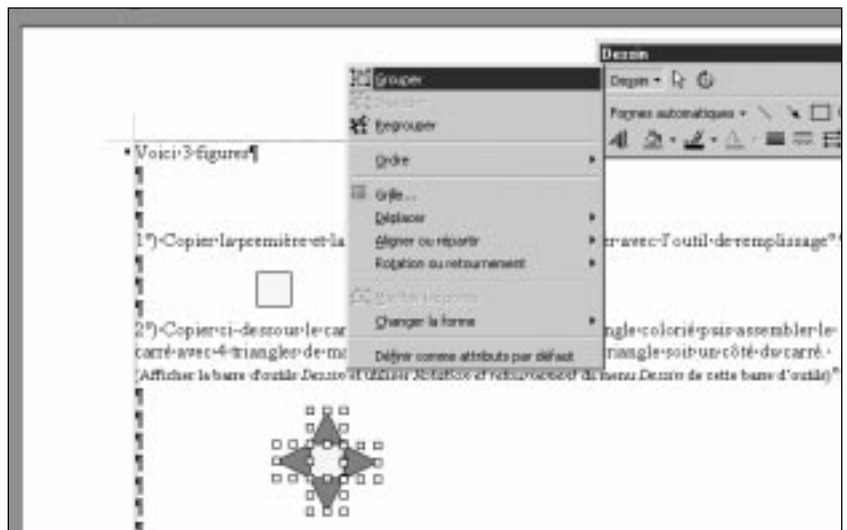
Ils sont alors prêts pour la deuxième étape, celle qui va consister à partir à la découverte de multiples pavages. Il s'agit de copier ce motif de base, de le coller plusieurs fois et d'assembler les motifs pour obtenir un pavage à deux motifs, celui créé et un polygone (losange, carré, hexagone, octogone...). L'opération est très simple (et motivante) à réaliser, il suffit de déplacer le motif de base à la souris (et d'ajuster au clavier). Très vite, chaque élève réalise son premier pavage. En regardant les écrans de ses voisins, il s'aperçoit que son pavage n'est pas le seul, qu'il y en a d'autres. L'exploration est lancée pour découvrir d'autres formes... Dans la réalité, pour que les mosaïques soient complètes, il faut ajouter des carreaux entre les motifs de base dont la forme doit être celle des polygones obtenus.

ÉTUDIER DANS UN DEVOIR

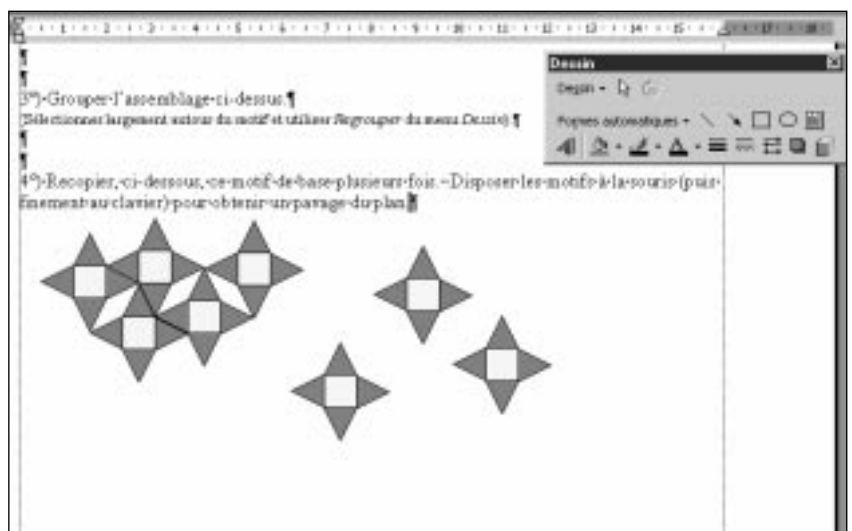
Après cette activité de découverte, on passe à un travail plus traditionnel avec un devoir à la maison (voir le sujet page suivante). Ce devoir est donné juste après la séance dans la salle informatique. Il permet d'examiner de plus près trois pavages principaux et d'étudier les propriétés des polygones obtenus : le carré, le losange et l'octogone.

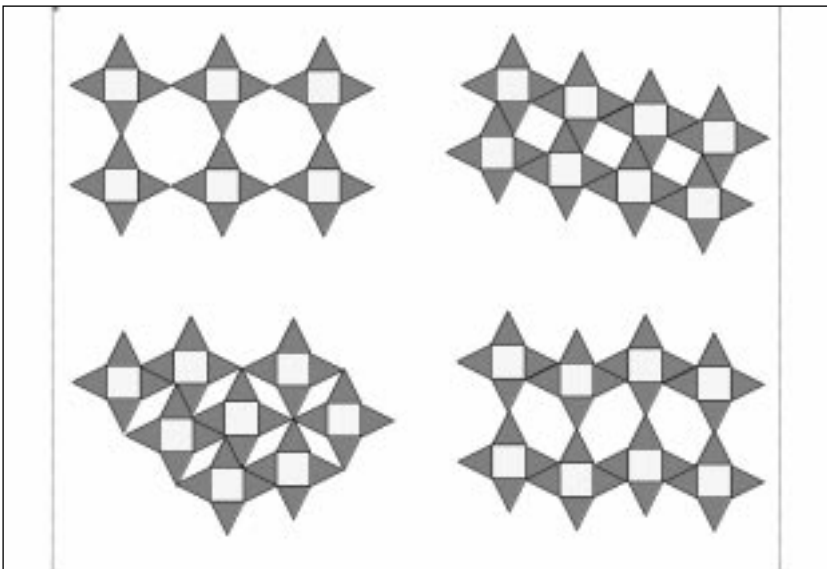


Ci-dessus, les élèves utilisent la rotation gauche avant d'ajuster le triangle au côté gauche du carré. Ci-dessous, après avoir fait une rotation droite du dernier triangle et l'avoir ajusté au côté droit du carré, ils sélectionnent l'image dans son ensemble avant d'en grouper les éléments.



Ci-dessous, les élèves peuvent alors donner libre cours à leur imagination. En recopiant plusieurs fois le motif de base sous la consigne 4, ils recherchent quels assemblages leur permettent d'obtenir un pavage.





Ci-contre, les résultats des explorations des élèves. On peut construire ces quatre pavages par l'assemblage du motif de base avec un octogone, un carré, un losange ou un hexagone.

PROGRAMMES DE MATHS

(extraits)

Classe de quatrième

Le programme du cycle central du collège a pour objectif de permettre, en géométrie, la connaissance de propriétés et de relations métriques relatives à des configurations de base (triangles, parallélogrammes), l'approche de transformations du plan (symétrie orthogonale, centrale, translation). [...]

Les vecteurs seront abordés en troisième et leur étude sera reliée à celle des translations à l'occasion de la composition de ces dernières. Diverses approches expérimentales, par exemple sur des frises ou des pavages, pourront introduire la notion de translation. La translation est définie à partir du parallélogramme. Elle pourra donner lieu à des manipulations, notamment sur des quadrillages. On pourra ainsi, après un travail expérimental conduisant à mettre en évidence la conservation des longueurs, de l'alignement, des angles et des aires, justifier certaines de ces conservations. Définition et propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices très simples de construction. [...]

[...] Le travail personnel des élèves en classe et en dehors de la classe est essentiel à leur formation. Les devoirs de contrôle sont d'abord destinés à vérifier l'acquisition des compétences exigibles. Les autres travaux peuvent avoir des objectifs beaucoup plus larges et revêtir des formes diverses. [...]

Classe de troisième

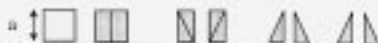
Document d'accompagnement

En géométrie, [...] les activités de conjecture, d'expérimentation et de démonstration sont poursuivies ainsi que la pratique du dessin des figures aussi bien à main levée qu'à l'aide des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique. [...] L'étude des transformations du plan se poursuit par celle de la rotation. L'élève aura ainsi à sa disposition en quittant le collège des moyens de repérer les éléments de symétrie et les invariances dans les triangles, quadrilatères, polygones réguliers et une certaine maîtrise de leurs constructions. Les configurations ainsi rencontrées offrent l'occasion, tout au long du collège, d'ouvertures culturelles en liaison avec l'observation de l'environnement naturel, architectural... et le travail entrepris par exemple en arts plastiques.

Devoir n°.....
Pour le

PAVAGES

On dispose de carreaux de côté a , certains sont coupés en deux par le milieu du côté puis recoupés en diagonale, on obtient des triangles rectangles :



On assemble les triangles rectangles par deux pour obtenir des triangles isocèles :



Puis on assemble des carrés avec quatre triangles isocèles pour obtenir le motif de base d'un pavage :



A) Ce motif présente-t-il des axes de symétrie ? Combien ?
A-t-il un centre de symétrie ?
Exprimer en fonction de a l'aire du motif de base

B) Etude des polygones de trois pavages parmi ceux qui ont été obtenus lors de la construction avec Word.

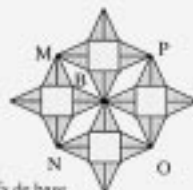
Pavage 1

- 1) Montrer que le quadrilatère A est un carré (penser à calculer un angle).
- 2) Exprimer, en fonction de a , la longueur des deux côtés de l'angle droit d'un des huit triangles rectangles qui composent le motif de base.
- 3) En utilisant un triangle rectangle, exprimer, en fonction de a , la longueur du côté du carré A.
- 4) Exprimer, en fonction de a , l'aire de l'assemblage représenté ci-contre (4 motifs de base et le carré A).
- 5) Application numérique : $a = 20$ cm.



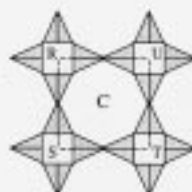
Pavage 2

- 1) Montrer que le quadrilatère B est un losange.
- 2) Donner, en fonction de a , la longueur d'un de ses côtés.
- 3) Calculer, en fonction de a , la longueur du côté du carré MNOP puis son aire.
- 4) En déduire l'aire du losange B.
- 5) Exprimer, en fonction de a , la longueur de la grande diagonale du losange B. Avec le résultat de la question précédente, en déduire la longueur de la petite diagonale.
- 6) Exprimer, en fonction de a , l'aire de l'assemblage représenté ci-contre (4 motifs de base et 4 losanges B).
- 7) Application numérique : $a = 20$ cm.

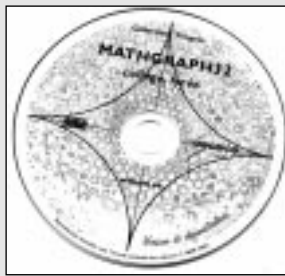


Pavage 3

- 1) Donner, en fonction de a , la longueur d'un des côtés de l'octogone C.
- 2) Exprimer, en fonction de a , la longueur d'un côté puis l'aire du carré RSTU.
- 3) En déduire l'aire de l'octogone C.
- 4) Calculer l'aire de l'assemblage représenté ci-contre (4 motifs de base et 1 octogone C).
- 5) Application numérique : $a = 20$ cm.



MATHGRAPH32



Le logiciel utilisé pour cette activité de construction géométrique est *MathGraph32* édité par le SCÉRÉN [CNDP].

Un cédérom de démonstration de *MathGraph32* est fourni avec ce numéro de *Médialog* et vous trouverez une présentation détaillée du logiciel en pages 22 et 23.

Les fichiers nécessaires à la réalisation de cette séquence sur les pavages ainsi que le texte du devoir sont téléchargeables sur le site de *Médialog* :

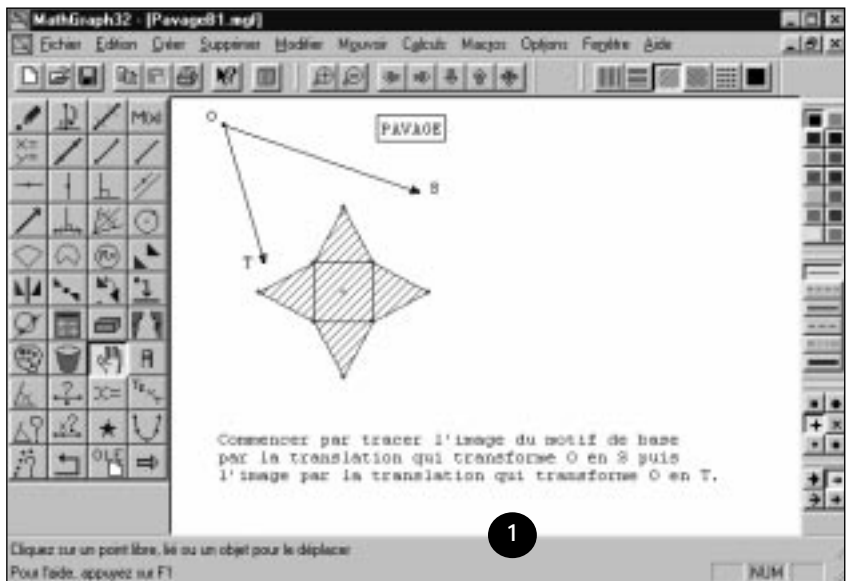
www.ac-creteil.fr/medialog/archive46/no46.htm

CONSTRUIRE
AVEC UN LOGICIEL SPÉCIALISÉ

De retour dans la salle informatique, l'activité suivante est conduite avec un logiciel de construction géométrique, *MathGraph32*, qui permet d'obtenir directement l'image d'un segment dans une transformation du plan. Elle suppose la connaissance de la translation (niveau quatrième) mais peut aussi (avec quelques explications supplémentaires) servir d'introduction à cette notion.

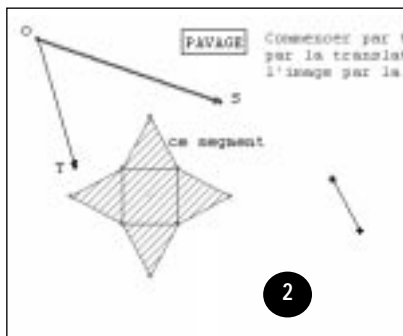
En début de séance, les élèves lancent le logiciel *MathGrah32* (voir encadré ci-dessus) et ouvrent le premier fichier préparé par leur professeur (*PavageB1.mgf*). Ils ont à l'écran la figure 1 et la première consigne qui leur demande de construire l'image du motif de base dans la translation qui transforme O en S (figures 2 et 3) puis dans la translation qui transforme O en T. Ils obtiennent alors la figure 4. L'image B est obtenue par la translation qui transforme O en S et l'image C par la translation qui transforme O en T.

En déplaçant les points S et T, ils doivent obtenir le début d'un des quatre pavages qu'ils ont construits avec le traitement de texte (figure 5). L'objectif est qu'ils comprennent que le pavage se construit par translation du motif de base. Par répétition de la



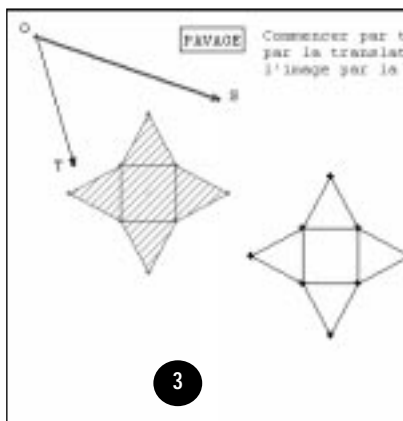
1

Figure 1, l'écran d'accueil du logiciel *MathGraph32*, après ouverture du fichier d'exercice, présente le motif de base et deux vecteurs.



2

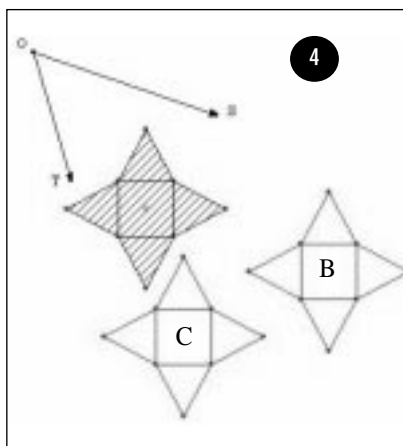
Figure 2, en sélectionnant un segment du motif de base et les points qui définissent une des translations, on obtient son image par cette translation.



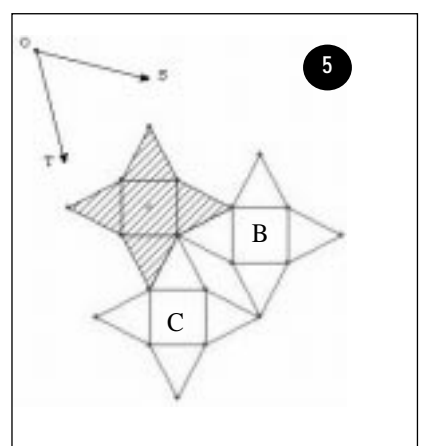
3

Figure 3, en répétant la translation pour chacun des segments du motif de base, on obtient une image du motif de base.

Figure 4, les images B et C du motif de base obtenues par les deux translations.



4



5

Figure 5, en déplaçant les points S et T, l'élève doit obtenir le début d'un pavage à deux motifs : le motif de base et un polygone d'assemblage (ici un losange).

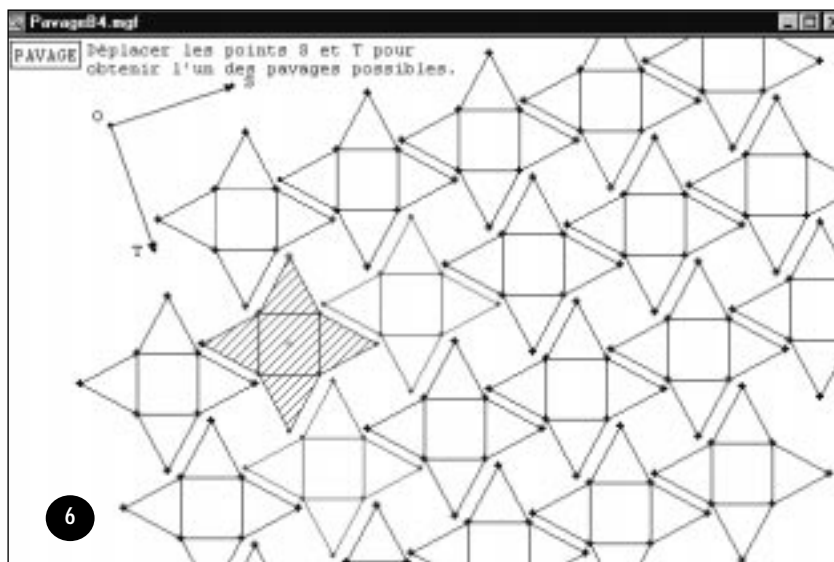
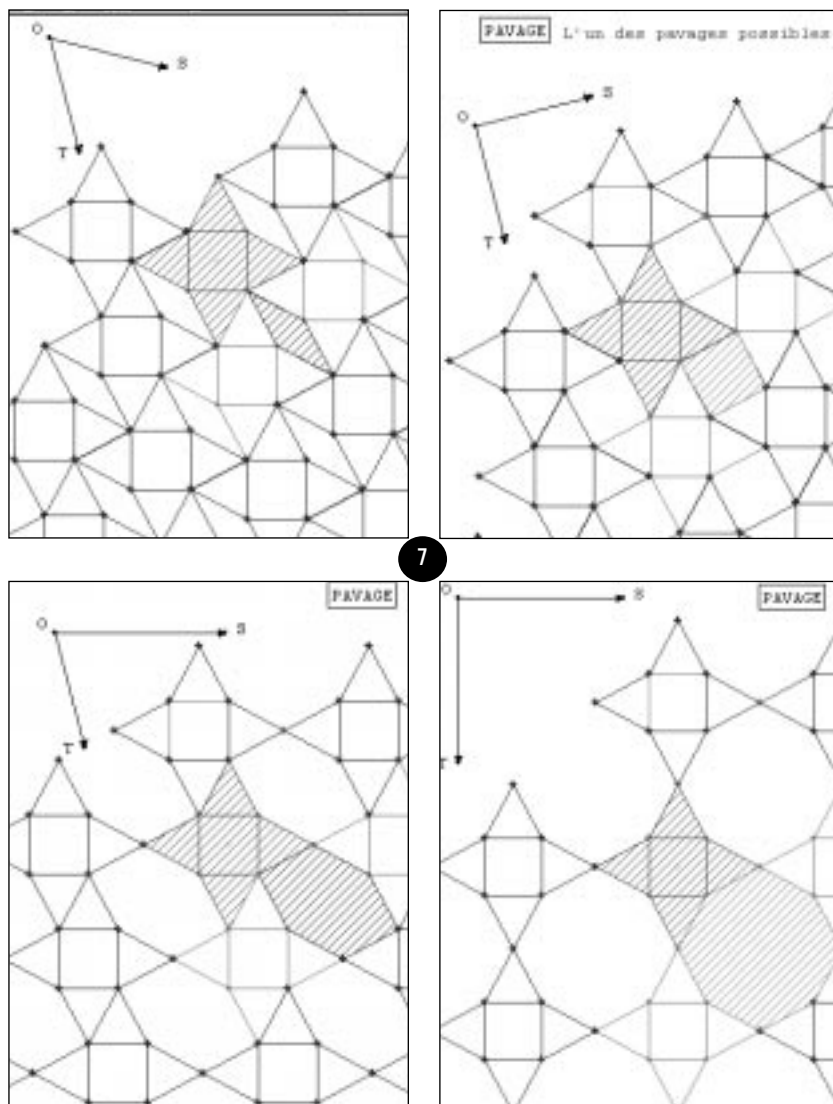


Figure 6, le fichier qui permettra aux élèves de terminer les pavages par déplacement des points S et T, leur est fourni pour qu'ils n'aient pas à répéter les manipulations précédentes (fichier PavageB2.mgf).

Figures 7, à partir des éléments de construction ci-dessus, en modifiant les translations, les élèves doivent obtenir les quatre pavages réalisés lors de la première activité avec le traitement de texte.



POUR PROLONGER CES ACTIVITÉS

- Cédérom *Encyclomaths* SCÉRÉN [CNDP].
- Livre *Le monde des pavages*, A. Deledicq, ACL-éditions, 1997.
- Article « Isométries et pavages » (revue *Repères*, numéro 48, p. 69-84, 2002). IREM de Montpellier Groupe Géométrie.
- Sur la Toile (mais beaucoup de documents ne sont pas du niveau collège) :
 - www.lille.iufm.fr/labo/cream/ressources/sequences/P/Pavage/desPavage.html
 - www.brunette.brucity.be/max/lespages/escher/
 - www.jura.ch/lcp/cours/dm/pavages/

translation sur B et C, on pourrait continuer la construction du pavage, B donnant deux nouveaux motifs, tout comme C et ainsi de suite. Afin d'éviter cette répétition d'actions, ils ouvrent le deuxième fichier préparé par le professeur (PavageB2.mgf), qui comporte plusieurs images obtenues par translations successives. Ils terminent un des pavages possibles en modifiant les translations (en déplaçant le point S puis le point T), de façon à ajuster les motifs. En déplaçant de nouveau l'un des points S ou T, ils peuvent obtenir les autres pavages. On fera remarquer que, pour couvrir tout le plan, il est nécessaire d'utiliser les translations inverses (la translation qui transforme S en O et celle qui transforme T en O). À l'issue de cette activité, les élèves ont compris que l'on peut paver le plan avec deux formes de pavés et des translations. On peut alors présenter d'autres pavages vus à l'Alhambra (dont certains avec une seule forme de pavé) et montrer qu'ils se « conservent » par d'autres transformations (en plus des translations), comme les symétries, les rotations... Et je ne serai pas étonné de voir des Zelliges remplacer les *tags* sur les murs... enfin, au moins virtuellement. ■